Correction de l'interrogation écrite 1

Vrai ou faux ? (3 points)

Répondez par vrai ou faux. Ne perdez pas de temps sur cette partie. Une bonne réponse vaut 0,5 point, une mauvaise -0,25.

1. Deux variables aléatoires indépendantes ont une covariance nulle : VRAI
2. Si la suite (X_n) converge en loi vers le réel α, alors elle converge aussi en probabilité vers α : FAUX c'est l'inverse
3. La variance de la somme de deux variables aléatoires est la somme des variables aléatoires : FAUX si ces variables ne sont pas indépendantes
4. La somme de deux variables binomiales n'est pas une variable binomiale : VRAI, la somme de deux variables binomiales indépendantes est une variable binomiale
5. Une approximation d'une loi binomiale $B(10; 0,2)$ est une loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$: FAUX, $n < 30$
6. Si $U \rightsquigarrow N(0,1)$ et $Y \rightsquigarrow \chi^2_n$, alors $\frac{U}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \rightsquigarrow T_{n-1}$ FAUX converge vers T_n

Exercice 1 : fonction de densité conjointe (5 points)

On considère le couple de variables (X,Y) de fonction de densité conjointe :

$$\begin{cases} f_{x,y} = 8e^{-2(x+y)} & \text{si } 0 < x < y < +\infty \\ f_{x,y} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.
$$f_x(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dy \;\; si \;\; x > 0, \;\; 0 \;\; sinon$$

$$f_x(x,y) = 8e^{-2x} \int_{x}^{+\infty} e^{-2y}dy \;\; si \;\; x > 0, \;\; 0 \;\; sinon$$

$$f_x(x,y) = 8e^{-2x}\Big[-\frac{1}{2}e^{-2y}\Big]_x^{+\infty} \quad si \;\; x > 0$$

$$f_x(x,y) = 4e^{-4x} \quad si \;\; x > 0$$

De même,

$$f_y(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dx \;\; si \;\; y > 0, \;\; 0 \;\; sinon$$

$$f_y(x,y) = 8e^{-2y} \int_{0}^{y} e^{-2x}dx \;\; si \;\; y > 0, \;\; 0 \;\; sinon$$

$$f_y(x,y) = 8e^{-2y}\Big[-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big]_0^{y} \quad si \;\; y > 0$$

$$f_y(x,y) = 4e^{-2y}(1 - e^{-2y}) \quad si \;\; y > 0$$

2. On remarque que $f_{x,y}(x,y) \neq f_x(x,y) \times f_y(x,y)$, ce qui prouve que X et Y ne sont pas indépendants.

3. On a donc la double condition $x+y<0$ et $0<x<y<+\infty$. Cela implique $0<x<\frac{1}{2}$ et $x<y<1-x$. On peut donc intégrer sur ces deux intervalles en commençant par y :

$$P(X+Y<1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_{x,y}(x,y)dydx$$

$$P(X+Y<1)=8\int_{0}^{\frac{1}{2}}e^{-2x}\Big(\int_{x}^{1-x}e^{-2y}dy\Big)dx$$

$$P(X+Y<1)=8\int_{0}^{\frac{1}{2}}e^{-2x}\Big[-\frac{1}{2}e^{-2y}\Big]_{1-x}^{x}dx$$

$$P(X+Y<1)=8\int_{0}^{\frac{1}{2}}e^{-2x}\Big(-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2(1-x)}\Big)dx$$

$$P(X+Y<1)=4\int_{0}^{\frac{1}{2}}e^{-2}-e^{-4x}dx$$

$$P(X+Y<1)=4\Big[e^{-2}x+\frac{1}{4}e^{-4x}\Big]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$P(X+Y<1)=4\Big[\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{4}e^{-2}-\frac{1}{4}\Big]$$

$$P(X+Y<1)=3e^{-2}-1$$

Exercice 2 : estimation par intervalle de confiance (8 points)

1. Le meilleur estimateur de m est la moyenne empirique :

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\bar{X}\rightsquigarrow N\Big(m,\frac{\sigma^2}{n}\Big)$$

2. On centre et on réduit :

$$\frac{\bar{X}-m}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\rightsquigarrow N(0,1)$$

Malheureusement, on ne connaît pas σ^2 mais seulement l'écart type empirique que l'on a mesuré ($S=10$) avec $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$. On sait par ailleurs que l'estimateur

$$\frac{\bar{X}-m}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}\rightsquigarrow T_{n-1}$$

On lit alors dans la table de Student pour 99 degrés de liberté :

$$p\Big(-1,96<\frac{\bar{X}-m}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}<1,96\Big)=0,95$$

$$p\Big(\bar{X}-\frac{1,96}{10}10<m<\bar{X}+\frac{1,96}{10}10\Big)=0,95$$

$$p\Big(20-1,96<m<20+1,96\Big)=0,95$$

$$p\Big(18,04<m<21,96\Big)=0,95$$

3. Pour pouvoir évaluer le bénéfice, il faut donc calculer le coût de ce travail C :

$$C = 1500 + 5(n - 100)$$

Choisir le prix de ce travail revient donc à choisir le nombre de temps d'attente à estimer afin d'obtenir un intervalle de confiance de longueur 1 minute à 95 %.
La longueur de l'intervalle de confiance 95% est égale à $2 \times 1,96 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$.

$$2 \times 1,96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 1 \Leftrightarrow n \geq (10 \times 3,92)^2$$

$$n \geq 1593,6064$$

$$C = 1500 + 5(1594 - 100) = 1500 + 5 \times 1494 = 1500 + \frac{14940}{2} = 1500 + 7470 = 8970$$

Donc on obtient le prix minimum P comme le coût plus 10 % de bénéfices :

$$P = 1,1 \times C = 8970 + 897 = 9867$$

Exercice 3 : Inégalité de Chebychev (4 points)

Rappel :Inégalité de Chebyshev
Soit X une variable aléatoire réelle, discrète ou continue de variance $V(X)$, alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, P\Big(|X - E(X)|) > \varepsilon\Big) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

On doit montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - X|) > \varepsilon) = 0 \; \forall\, \varepsilon > 0$, tout en utilisant l'inégalité de Chebyshev.
On a $X_n - X = Z_n$, avec $E(Z_n) = 0$, donc

$$P(|X_n - X|) > \varepsilon) = P(|Z_n|) > \varepsilon) = P(|Z_n - E(Z_n)|) > \varepsilon)$$

D'après l'inégalité de Chebyshev, $\forall\, \varepsilon > 0, P(|Z_n - E(Z_n)|) > \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X|) > \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} P(|Z_n - E(Z_n)|) > \varepsilon) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/n^2}{\varepsilon^2}$$

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X|) > \varepsilon) \leq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X|) > \varepsilon) = 0$$