L3 2006/2007, Statistique et Économétrie
Corrigé de l'Interrogation I

Question

Donnez les définitions de la convergence en probabilité et de la convergence en moyenne quadratique. Quel type de convergence est plus fort ?

La variable aléatoire x_n converge en probabilité vers une constante c si $\lim_{n\to\infty} P(|x_n - c| > \epsilon) = 0$ pour ϵ positif. Si x_n est de moyenne μ_n et de variance σ_n^2 telles que les limites de μ_n et σ_n^2 soient respectivement c et 0, alors x_n converge en moyenne quadratique vers c. La convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité. La réciproque est fausse.

Exercice 1

Un supermarché vend, entre autres, des bananes et des clémentines. Soit Q_B la quantité hebdomadaire vendue de bananes et Q_C la quantité hebdomadaire vendue de clémentines. Les deux quantités sont mesurés en tonnes. La table ci-dessous présente la loi jointe de distribution Q_B et Q_C au supermarché local en septembre-novembre 2006.

	$Q_C = 0,5$	$Q_C = 0,7$	$Q_C = 0,9$	$Q_C = 1,0$
$Q_B = 1$	0,1	0,1	0,15	0,05
$Q_B = 2$	0,1	0,2	0,25	0,05

1. Déterminer la loi de distribution marginale de Q_B.
   $P(Q_B = 1) = 0,1 + 0,1 + 0,15 + 0,05 = 0,4$;
   $P(Q_B = 2) = 0,1 + 0,2 + 0,25 + 0,05 = 0,6$.
2. Calculer l'espérance et la variance de Q_B.
   $E(Q_B) = 0,4 \cdot 1 + 0,6 \cdot 2 = 1,6$; $V(Q_B) = 0,4(1 - 1,6)^2 + 0,6(2 - 1,6)^2 = 0,24$.
3. Déterminer la loi de distribution conditionnelle de Q_B sachant que $Q_C = 0,9$.
   $P(Q_C = 0,9) = 0,15 + 0,25 = 0,4 \Rightarrow$
   $P(Q_B = 1|Q_C = 0,9) = P(Q_B = 1, Q_C = 0,9)/P(Q_C = 0,9) = 0,15/0,4 = 0,375$;
   $P(Q_B = 2|Q_C = 0,9) = P(Q_B = 2, Q_C = 0,9)/P(Q_C = 0,9) = 0,25/0,4 = 0,625$.
4. Calculer l'espérance conditionnelle de Q_B sachant que $Q_C = 0,9$.
   $E(Q_B = 2|Q_C = 0,9) = 1 \cdot P(Q_B = 1|Q_C = 0,9) + 2 \cdot P(Q_B = 2|Q_C = 0,9) = 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,625 = 1,625$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire de loi normale d'espérance m inconnue et de variance $\sigma^2 = 4$. On dispose de l'échantillon suivant tiré de X :
-1,2 ; 1,7 ; 1,3 ; 1,5 ; 2,0 ; -1,5 ; 1,6 ; -2,1 ; 1,3 ; 3,3.

1. Calculer la moyenne et la variance de l'échantillon.
   $\bar{x} = (-1,2 + 1,7 + 1,3 + 1,5 + 2,0 + -1,5 + 1,6 + -2,1 + 1,3 + 3,3)/10 = 0,79$;
   $s^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2)/(n-1) = ((-1,2)^2 + 1,7^2 + 1,3^2 + 1,5^2 + 2,0^2 + (-1,5)^2 + 1,6^2 + (-2,1)^2 + 1,3^2 + 3,3^2 - 10 \cdot 0,79^2)/(10-1) = 3,0921.$
2. On propose deux estimateurs de m : $\hat{m}_1 = \bar{x}$ (la moyenne de l'échantillon) et $\hat{m}_2 = x_1$ (la première observation). Montrez que $\hat{m}_1$ et $\hat{m}_2$ sont des estimateurs non-biaisés de m.
   $E(\hat{m}_1) = E(\bar{x}) = E(\sum x_i/n) = \sum E(x_i)/n = nm/n = m$ et $E(\hat{m}_2) = E(x_1) = m$ donc les deux estimateurs sont sans biais.
3. Calculez la variance de ces deux estimateurs.
   $V(\hat{m}_1) = V(\bar{x}) = V(\sum x_i/n) = \sum V(x_i)/n^2 = n\sigma^2/n^2 = \sigma^2/n$; $V(\hat{m}_2) = V(x_1) = \sigma^2$.
4. Peut-on conclure quel estimateur est meilleur, $\hat{m}_1$ ou $\hat{m}_2$? Expliquer.
   $\hat{m}_1$ est meilleur que $\hat{m}_2$, car les deux estimateurs sont sans biais et la variance de $\hat{m}_1$ est inférieure à celle de $\hat{m}_2$. On dit que $\hat{m}_1$ est plus efficace que $\hat{m}_2$.
5. Calculer un intervalle bilatéral de confiance 95% pour m.

$$\bar{x} \rightsquigarrow N(m, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{x}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow P(-1,96 < \frac{\bar{x}-m}{\sigma/\sqrt{n}} < 1,96) = 0,95 \Rightarrow$$

$$P(\bar{x} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0,95 \Rightarrow$$

$$P(0,79 - 1,96\frac{2}{\sqrt{10}} < m < 0,79 + 1,96\frac{2}{\sqrt{10}}) = 0,95 \Rightarrow P(-0,45 < m < 2,03) = 0,95.$$

6. Supposons que $m = 1$. Calculer $P(X > 0)$.
   Maintenant on connaît la distribution de X : $X \rightsquigarrow N(1,4)$. Alors

$$P(X > 0) = P\left(\frac{X-1}{2} > \frac{0-1}{2}\right) = 1 - \Phi(-0,5) = \Phi(0,5) = 0,6915.$$

Barème :

Question : 4 points

Exercice 1 :
1. 1 point
2. 2 points
3. 1 point
4. 1 point

Exercice 2 :
1. 2 points
2. 1,5 points
3. 1,5 points
4. 1 point
5. 3 points
6. 2 points