**L3 2006/2007, Statistique et Économétrie**
**Corrigé de l'Interrogation I**

## Question

Donnez la définition de la covariance entre deux variables aléatoires $X$ et $Y$. Est-ce que la covariance nulle entre $X$ et $Y$ entraîne l'indépendance de $X$ et $Y$ ? Expliquez.

Par définition, $cov(X, Y) = E[X - E(X)][Y - E(Y)]$. Si les v.a. $X$ et $Y$ sont indépendantes, $cov(X, Y) = 0$. La réciproque est généralement fausse, c'est-à-dire que si deux v.a. ont une covariance nulle elles ne sont pas forcément indépendantes, sauf dans le cas particulier où $(X, Y)$ est un couple normal.

## Exercice 1

Un supermarché vend, entre autres, des bananes et des clémentines. Soit $P_B$ le prix des bananes et $P_C$ le prix des clémentines. Les deux prix sont mesurés en euros. La table ci-dessous présente une loi jointe de distribution $P_B$ et $P_C$ au supermarché local en septembre-novembre 2006.

| | $P_C = 1,9$ | $P_C = 2,0$ | $P_C = 2,2$ |
|---|---|---|---|
| $P_B = 0,8$ | 0,06 | 0,12 | 0,02 |
| $P_B = 1,0$ | 0,20 | 0,40 | 0,10 |
| $P_B = 1,2$ | 0,04 | 0,03 | 0,03 |

1. Déterminer la loi de distribution marginale de $P_C$.
   $P(P_C = 1,9) = 0,06 + 0,2 + 0,04 = 0,3;$
   $P(P_C = 2,0) = 0,12 + 0,4 + 0,03 = 0,55;$
   $P(P_C = 2,2) = 0,02 + 0,1 + 0,03 = 0,15.$
2. Déterminer la loi de distribution conditionnelle de $P_C$ sachant que $P_B = 0,8$.
   $P(P_B = 0,8) = 0,06 + 0,12 + 0,02 = 0,2 \Rightarrow$
   $P(P_C = 1,9|P_B = 0,8) = P(P_C = 1,9; P_B = 0,8)/P(P_B = 0,8) = 0,06/0,2 = 0,3;$
   $P(P_C = 2,0|P_B = 0,8) = P(P_C = 2,0; P_B = 0,8)/P(P_B = 0,8) = 0,12/0,2 = 0,6;$
   $P(P_C = 2,2|P_B = 0,8) = P(P_C = 2,2; P_B = 0,8)/P(P_B = 0,8) = 0,02/0,2 = 0,1.$
3. Peut-on conclure que le prix des bananes et le prix des clémentines sont indépendants ?
   $P_B$ et $P_C$ sont dépendants, puisque la loi marginale de $P_C$ n'est pas la même que la loi conditionnelle de $P_C$ sachant $P_B = 0,8$.
4. Géraldine achète 1 kilo de bananes et 2 kilos de clémentines. Quel est la valeur espérée de ce panier ?
   La valeur du panier $(P_B + 2P_C)$ pour les combinaisons possibles de $P_B$ et $P_C$ :

| | $P_C = 1,9$ | $P_C = 2,0$ | $P_C = 2,2$ |
|---|---|---|---|
| $P_B = 0,8$ | 4,6 | 4,8 | 5,2 |
| $P_B = 1,0$ | 4,8 | 5,0 | 5,4 |
| $P_B = 1,2$ | 5,0 | 5,2 | 5,6 |

d'où $E(P_B + 2P_C) = 4,6 \cdot 0,06 + 4,8 \cdot 0,12 + 5,2 \cdot 0,02 + 4,8 \cdot 0,2 + 5,0 \cdot 0,4 + 5,4 \cdot 0,1 + 5,0 \cdot 0,04 + 5,2 \cdot 0,03 + 5,6 \cdot 0,03 = 4,98$

**Exercice 2**

Une compagnie d'assurance a envoyé 200 propositions à des clients potentiels tirés dans une très large population et elle a en retour obtenu 24 réponses favorables. Elle s'intéresse à la valeur de la probabilité $p$ de succès pour chaque envoi. On suppose que les comportements des individus sont indépendants les uns des autres.

1. Quel estimateur proposez-vous pour $p$ ? Quelle est l'estimation correspondante aux observations faites ?
   On dispose de 200 tirages d'une v.a. de Bernoulli : $X_1, \ldots, X_{200} \rightsquigarrow B(1,p)$. $\hat{p} = \sum X_i/200 = 24/200 = 0,12$.
2. Quelle est la loi de cet estimateur ? Pouvez-vous utiliser l'approximation normale pour les calculs numériques ?
   $200\hat{p} \rightsquigarrow B(200,p)$ (loi binomiale) mais on peut utiliser l'approximation normale, puisque $n\hat{p}(1-\hat{p}) = 21,12 > 15$ :$\hat{p} \rightsquigarrow N(p, \frac{p(1-p)}{n})$.
3. Calculez un intervalle bilatéral de confiance 95% pour $p$.
   $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow P(\hat{p} - 1,96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + 1,96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}) = 0,95 \Rightarrow$
   $P(0,12 - 1,96\sqrt{\frac{0,12(1-0,12)}{200}} < p < 0,12 + 1,96\sqrt{\frac{0,12(1-0,12)}{200}}) = 0,95 \Rightarrow$
   $P(0,075 < p < 0,165) = 0,95$.
4. Soit $p = 0,15$. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 40 réponses sur les 200 propositions envoyées ?
   Maintenant on sait que la vraie probabilité de succès est 0,15. L'approximation normale de la loi de $\hat{p}$ est toujours valide : 0,15(1-0,15)200=25,5. Ainsi, $\hat{p} \rightsquigarrow N(0,15; \frac{0,15(1-0,15)}{200}) \Rightarrow \hat{p} \rightsquigarrow N(0,15; 0,0006375)$. $P(\hat{p} > 40/200) = P(\hat{p} > 0,2) = P(\frac{\hat{p}-0,15}{\sqrt{0,0006375}} > \frac{0,2-0,15}{\sqrt{0,0006375}}) = 1 - \Phi(1,98) = 1 - 0,9761 = 0,0239$.

**Barème :**

Question :
4 points

Exercice 1 :
1. 1 point
2. 1 point
3. 2 points
4. 2 points

Exercice 2 :
1. 1 point
2. 2 points
3. 3 points
4. 4 points