Vendredi 17 novembre 2006

Interrogation de contrôle continu n°2

Eléments de correction

Questions de cours

1. La densité d'une loi exponentielle d'espérance θ est $f(x) = \begin{cases} = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{si } x \succeq 0 \\ = \quad 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. $\widehat{a} = (\text{X'X})^{-1}\ \text{X'Y}$

3. Les MCO sont sans biais, linéaires par rapport aux variables dépendantes, et de variance minimale dans la classe des estimateurs linéaires sans biais ("BLUE").

Exercice 1

Voire l'exercice 1 du TD 4.

Exercice 2

1. On modéliserait la proportion d'étudiants qui ont trouvé un emploi par une loi loi binomiale. Ici, les conditions permettant d'approximer par une loi normale ne sont pas réunies (on a $np(1-p)$ <15)

2. On modélise la moyenne du salaire par une loi normale.

   Comme la variance est inconnue, on utilise la variance empirique sans biais, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1 \grave{a} n}(X_i - \overline{X})$.

   Si U suit une loi normale centrée réduite et Y une loi du chi-deux à n degrés de libertés, alors $\frac{U}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$˜$T_n$, loi de Student à n degrés de liberté.

   On a vu que si $X_1 ... X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi $N(m, \sigma)$, alors $\frac{\overline{X}-m}{S/\sqrt{n}}$suit une loi de Student à $(n-1)$ degrés de libertés.

   On en déduit que $\frac{\overline{X}-m}{9000/\sqrt{27}}$˜$T_{26}$.

   D'après la table d'une loi de Student, $P\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{9000/3\sqrt{3}}\right| \prec 2.056\right) = 0.05$

   L'intervalle de confiance à 95% pour m est donc $\left[\overline{X} - 2.056\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + 2.056\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$,

   on trouve donc $[22506 - 3561.1; 22506 + 3561.1]$,c'est-à-dire $[1844.9; 26067.1]$.

Exercice 3

Cet exercice s'inspire d'une recherche récente réalisée par N. Ashraf, J. Berry et J. Shapiro, que vous pourrez découvrir en détail en lisant "Can Higher Prices Stimulate Product Use? Evidence From a Field Experiment in Zambia" , téléchargeable à l'adresse suivante : http://home.uchicago.edu/~jmshapir/commit103006.pdf

1. a. Pour un ajustement simple, du type $y_t = ax_t + b + \varepsilon_t$, avec t variant de 1 à T, l'estimateur des MCO du paramètre a est :

   $\widehat{a} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{T} x_t y_t - T\overline{xy}}{\sum\limits_{t=1}^{T} {x_t}^2 - T\overline{x}^2}$, $\overline{x}$ étant la moyenne empirique des x_t

   ou encore : $\widehat{a} = \frac{cov(x,y)}{V(x)}$

   avec $cov(x,y) = \frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T} x_t y_t - T\overline{xy}$

   et $V(x) = \frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T} {x_t}^2 - T\overline{x}^2$

   b. Ici, $y = \ln(q)$ et $x = \ln(p)$

   c. $\widehat{a} = \frac{E(xy)-E(x)E(y)}{E(x^2)-E^2(x)}$

   $\widehat{a} = \frac{\frac{1}{10}\sum[\ln(p_i)\ln(q_i)]-\left[\frac{1}{10}\sum\ln(p_i)\right]\left[\frac{1}{10}\sum\ln(q_i)\right]}{\frac{1}{10}\sum[\ln(q_i)]^2-\left[\frac{1}{10}\sum\ln(q_i)\right]^2}$

   $\widehat{a} = \frac{25.06-6.306*4}{40-(6.306)^2} = \frac{25.06-25.2}{40-39.8} = -\frac{0.14}{0.2} = -0.7$

   Ce coefficient s'interprète comme l'élasticité - prix de la demande de Clorin.

2. Le t de Student permet de savoir si le coefficient est estimé avec précision. C'est la valeur absolue du coefficient divisée par son écart type.

   $t = \left|\frac{\hat{a}}{\widehat{\sigma}}\right|$

   Sous l'hypothèse de normalité des erreurs, un intervalle de confiance à 95% du coefficient $\hat{a}$ est donné par $[\hat{a} - 2\widehat{\sigma}; \hat{a} + 2\widehat{\sigma}]$,soit, en écrivant $\widehat{\sigma}$ en fonction de t, par $[\hat{a} - 2\frac{\hat{a}}{t};\hat{a} + 2\frac{\hat{a}}{t}]$.

   Pour que le coefficient soit significatif, qu'il garde le même signe avec 95% de chances, il faut donc qu'on ait t>2.

3. Dans le cas "payer lorsqu'on passe d'un prix nul à un prix positif", le coefficient de l'usage de Clorin est significatif, car t=$\left|\frac{0.085}{0.04}\right| = 2.125 >$ 2.Le fait de payer sa bouteille de Clorin accroît la probabilité de l'utiliser lorsqu'on compare à la situation où le Clorin serait distribué gratuitement.

   Dans le cas "payer 100 kw lorsque le prix est déjà positif", le coefficient n'est pas significatif. En effet, t= $\left|\frac{0.01}{0.012}\right| = 0.83 < 2$.On ne peut pas conclure : le fait de payer 100 kw de plus, lorsqu'on achète du Clorin, n'accroît pas significativement la probabilité de l'utiliser.

4. Une ONG a pour objectif d'augmenter l'usage effectif de Clorin. Les dernières estimations laissent penser que le fait de payer a un impact sur l'usage ultérieur que le ménage fera du Clorin. Distribuer gratuitement du Clorin n'est donc pas la meilleure solution : beaucoup de ménages ne l'utiliseraient pas.

   Par contre, le niveau du prix n'a pas d'impact sur l'usage du Clorin : si on se place dans le cas où le ménage paye son Clorin, alors payer 100 kw de plus ou de moins n'a pas d'impact significatif sur l'usage qu'il en fera.

   Or nous avons vu avec la première question que l'élasticité est négative, et relativement importante, étant donnée la faiblesse des variations de prix : -0.7. Donc augmenter le prix n'a pas de sens : cela décourage les ménages le splus pauvres, mais n'a pas d'impact sur l'usage effectif du produit.

   D'après l'étude réalisée, il faut faire payer le Clorin, mais fixer le prix très bas.