Statistiques appliquées (L3) **Cours de J-F. Gardes**
Correction des TDs **2006-2007**

Correction du TD 1

Rappel : Référence bibliographique du cours

LECOUTRE J-P. (2006), "Statistiques et probabilités : Manuel et Exercices Corrigés", 3ème Edition, DUNOD.

Exercice 1

Correction dans le Lecoutre (exercice n° 5 page 25).

Exercice 2

Correction dans le Lecoutre (exercice n° 7 page 26).

Exercice 3

Correction dans le Lecoutre (exercice n° 16 page 27).

Exercice 5

1. 61%
2. 18-34 et 65+
3. 30%

Exercice 6

On considère les familles de deux enfants. X est le nombre de garçons, Y le nombre de filles. Les événements {X=2} et {Y=2} sont supposés équiprobables et la probabilité d'avoir un garçon et une fille est égale à 0,5.

1. Le tableau de la loi conjointe présente les probabilités de l'événement conjoint selon les valeurs du couple (X,Y). Par exemple P(X=0,Y=0) correspond à la probabilité qu'une famille de deux enfants ait 0 fille et 0 garçon. C'est clairement impossible. P(X=0,Y=2) correspond à la probabilité pour une famille de deux enfants d'avoir 2 filles et 0 garçon. La probabilité d'avoir une fille est 0,5 et donc la probabilité d'en avoir 2 est de $0,5 \times 0,5 = 0,25$.

Y \ X	0	1	2
0	0	0	0,25
1	0	0,50	0
2	0,25	0	0

Rappel : les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$

$$p(X = x_i; Y = y_j) = p(X = x_i)p(Y = y_i)$$

On voit que : $P(X = 0, Y = 2) \neq P(X = 0) \times P(Y = 2)$ donc X et Y sont dépendants – cette dépendance provient de la contrainte X+Y=2, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une famille de deux enfants.

2. Lois marginales de X et de Y :

X	P(X=x)	Y	P(Y=y)
0	0,25	0	0,25
1	0,5	1	0,5
2	0,25	2	0,25
$\sum$	1	$\sum$	1

3. Soit $\Omega_{X,Y}$ l'ensemble des événements possibles. $\Omega_{X,Y} = \{(x, y), x = 0, 1, 2 \text{ et } y = 0, 1, 2 \text{ tels que } x + y = 2\}$. Calculons d'abord pour toutes les combinaisons de (X,Y) le Z possible :
Pour (x,y)=(2,0), z=1
Pour (x,y)=(1,1), z=0
Pour (x,y)=(0,2), z=1
Donc on a $p(Z = 0) = p(X = 0; Y = 0) + p(X = 1; Y = 1) + p(X = 2; Y = 2) = 0 + 0,5 + 0 = 0,5$ et on a $p(Z = 1) = p(X = 2; Y = 0) + p(X = 0; Y = 2) = 0,25 + 0,25 = 0,5$
Z suit donc une loi de Bernouilli de paramètre 0,5.

Exercice 8

Correction dans le Lecoutre (exercice n° 7 page 58).

Exercice 9

La variable aléatoire observée est la variable de Bernouilli valant 1 si l'envoi est suivi d'une réponse favorable, 0 sinon. Nous disposons de 600 observations indépendantes et identiquement distribuées (tirage sans remise mais dans une très large population, et comportements indépendants). On peut donc considérer que l'on a un échantillon de taille 600 d'une Bernouilli(1,p).

Exercice 10

Correction dans le Lecoutre (n° 10 page 95).

Exercice 11

Correction dans le Lecoutre (n° 12 page 95).

Exercice 12

On considère le couple de variables (X,Y) de fonction de densité conjointe :

$$\begin{cases} f_{x,y} = ce^{-b(x+y)} & \text{si } 0 < x < y < +\infty \\ f_{x,y} = \quad 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a c et b des réels positifs non nuls.

1. $\Omega_{X,Y}$ n'est pas rectangulaire du fait que $x < y$, donc X et Y ne peuvent être indépendantes.
2. On sait que b et c doivent vérifier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dxdy = 1$$

   On doit respecter la condition $0 < x < y < +\infty$ pour intégrer, d'où :

$$c\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} e^{-by}dy\right) e^{-bx}dx = 1$$

$$c\int_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{b}e^{-by}\right]_x^{+\infty} e^{-bx}dx = 1$$

$$c\int_0^{+\infty}\frac{1}{b}e^{-bx}e^{-bx}dx = 1$$

$$c\left[-\frac{1}{2b^2}e^{-2by}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\frac{c}{2b^2} = 1 \Leftrightarrow c = 2b^2$$

   La densité s'écrit donc : $f_{X,Y} = 2b^2e^{-b(x+y)}$ si $0 < x < y < +\infty$ et $f_{x,y} = 0$ sinon.
3. Pour $c = 2$ et $b = 1$, la densité marginale de x est :

$$f_x(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dy \ si \ x > 0, \ 0 \ sinon$$

$$f_x(x,y) = 2e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_x^{+\infty} \quad si \ x > 0$$

$$f_x(x,y) = 2e^{-2x} \quad si \ x > 0$$

   De même,

$$f_y(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dx \ si \ y > 0, \ 0 \ sinon$$

   soit : $f_y(x,y) = 2e^{-y}(1 - e - y)$ si $y > 0$, 0 sinon.
   On remarque que $f_{x,y}(x,y) \neq f_x(x,y) \times f_y(x,y)$, ce qui prouve que X et Y ne sont pas indépendants.

4. La densité conditionnelle de $X|Y=y$ s'écrit :

$$f_{X|Y=y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(x,y)} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-y})} \; si \; 0 < x < y, \; 0 \; sinon$$

On vérifie que $\int_0^y \frac{e^{-x}}{1-e^{-y}} dx = 1$.
La densité conditionnelle de $Y|X=x$ s'écrit :

$$f_{Y|X=x}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x,y)} = e^{-(y-x)} \; si \; 0 < x < y, \; 0 \; sinon$$

5.
$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y.f_{Y/X}(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-(y-x)}dy = e^x \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-y}dy$$

par intégration par partie ($u = y => u' = 1$ et $v' = e^{-y} => v = -e^{-y}$), on a :

$$E(Y|X=x) = e^x \left(\Big[-ye^{-y} \Big]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} -e^{-y} \right) dy$$

$$E(Y|X=x) = e^x(xe^{-x} + e^{-x}) = x + 1$$

Exercice 13

Correction dans le Lecoutre (n° 13 page 135).