TD1

Exercice 11

Posons $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X)$ et commençons par déterminer m et σ.

Notons F la fonction de répartition de la loi normale standard $N(0,1)$. Afin de pouvoir utiliser la table statistique de $N(0,1)$, nous considérons la variable aléatoire $U = \frac{X-m}{\sigma}$ qui suit la loi $N(0,1)$.

On a :

$$X < 2 \Longleftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} < \frac{2-m}{\sigma} \Longleftrightarrow U < \frac{2-m}{\sigma}$$

donc

$$P\,(X < 2) = P(U < \frac{2-m}{\sigma}) = F(\frac{2-m}{\sigma})$$

or par hypothèse $P\,(X < 2) = 0.0668$ donc $F(\frac{2-m}{\sigma}) = 0.0668$. Cette valeur ne figure pas sur la table statistique de la loi normale centrée car elle est inférieure à 0.5 (ce qui implique d'ailleurs que $\frac{2-m}{\sigma} < 0$) . Par contre $1 - F(\frac{2-m}{\sigma}) = 1 - 0.0668 = 0.9332$ figure bien sur la table : $F(1,5) = 0.9332$ donc $1 - F(\frac{2-m}{\sigma}) = F(1.5)$. Par ailleurs en utilisant la formule $F(-u) = 1 - F(u)$ on a $1 - F(\frac{2-m}{\sigma}) = F(\frac{m-2}{\sigma})$ donc $F(\frac{m-2}{\sigma}) = F(1,5)$ d'où $\frac{m-2}{\sigma} = 1.5$ (F étant strictement croissante, elle est injective), relation qui peut également s'écrire $m - 2 = 1.5\sigma$.

On raisonne de façon similaire pour exploiter l'hypothèse $P(X \geq 12) = 0.1587$ qui est équivalente à $P(X < 12) = 1 - 0.1587 = 0,8413$.

$$X < 12 \Longleftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} < \frac{12-m}{\sigma} \Longleftrightarrow U < \frac{12-m}{\sigma}$$

donc

$$P\,(X < 12) = P(U < \frac{12-m}{\sigma}) = F(\frac{12-m}{\sigma})$$

or $P\,(X < 2) = 0.8413$ donc $F(\frac{12-m}{\sigma}) = 0.8413$. Cette valeur figure sur la table statistique de $N(0,1)$: $F(1) = 0.8413$ donc $F(\frac{12-m}{\sigma}) = F(1)$ d'où $\frac{12-m}{\sigma} = 1$ ou encore $12 - m = \sigma$.

Nous nous retrouvons donc avec le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} m - 2 = 1.5\sigma \\ 12 - m = \sigma \end{cases}$$

dont la résolution (évidente) donne $m = 8$ et $\sigma = 4$.

Par ailleurs, le fait que $U = \frac{X-m}{\sigma}$ suive la loi $N(0,1)$ implique que $U^2 = \left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2$ suit la loi $\chi^2(1)$. Notons G la fonction de répartition de $\chi^2(1)$.

On a : $(X-m)^2 < a \Longleftrightarrow U^2 < \frac{a}{\sigma^2}$ donc $P((X-m)^2 < a) = P(U^2 < \frac{a}{\sigma^2}) = G\left(\frac{a}{\sigma^2}\right)$ or par hypothèse $P((X-m)^2 < a) = 0.95$ donc $G\left(\frac{a}{\sigma^2}\right) = 0,95$, c'est-à-dire que $\frac{a}{\sigma^2}$ est le fractile d'ordre 0.95 de la loi $\chi^2(1)$. D'après la table statistique du $\chi^2(\nu)$ (par exemple celle se trouvant p.289 du "Lecoutre"), on peut alors affirmer que $\frac{a}{\sigma^2} = 3,841$ d'où $a = 3,841 \times 4^2 = 61,44$.

Exercice 12

Rappels:

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles continues. Les densités marginales de X et de Y et les densités conditionnelles de $X \mid Y = y$ et $Y \mid X = x$ sont données par :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \text{ en tout point } y \text{ tel que } f_Y(y) \neq 0$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \text{ en tout point } x \text{ tel que } f_X(x) \neq 0$$

1) Rappelons que les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in R^2$ la relation suivante est vérifiée:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

Montrons que X et Y ne sont pas indépendantes. Pour cela, il suffit d'établir l'existence d'un couple (x, y) qui ne satisfait pas la relation précédente. Nous allons montrer que $f_{X,Y}(3,2) \neq f_X(3).f_Y(2)$. Remarquons que $f_{X,Y}(3,2) = 0$ (par hypothèse) alors que $f_X(3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(3,y)dy = \int_2^{+\infty} ce^{-b(3+y)}dy > 0$ et $f_Y(2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,2)dy = \int_0^2 ce^{-b(x+2)}dy > 0$ (ces deux inégalités découlent du fait que l'intégrale d'une fonction strictement positive est strictement positive). Il s'ensuit clairement que $f_{X,Y}(3,2) \neq f_X(3).f_Y(2)$ et par conséquent X et Y ne sont pas indépendantes.

Remarque: il existe une façon plus expéditive de répondre à cette question. En effet, dans le cas de deux variables continues réelles X et Y, une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'elles soient indépendantes est que le domaine $\Omega_{X,Y} = \{(x,y) / f_{X,Y}(x,y) \neq 0\}$ soit rectangulaire, or dans cet exercice ce n'est clairement pas le cas.

2) La fonction $f_{X,Y}$ étant une densité de probabilité sur R^2, elle doit vérifier la relation : $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$. Cette intégrale double peut se calculer en intégrant d'abord par rapport à la variable x puis par rapport à la variable y c'est-à-dire en calculant d'abord $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$ pour tout $y \in R$ puis $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \right) dy$. On sait par hypothèse que si $y \leq 0$ alors $f_{X,Y}(x,y) = 0$ pour tout $x \in R$ ce qui implique

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = 0$. Par ailleurs, si $y > 0$ alors $f_{X,Y}(x,y)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[0,y]$ d'où

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y ce^{-b(x+y)}dx = ce^{-by}\int_0^y e^{-bx}dx$

$= ce^{-by}\left[\frac{e^{-bx}}{-b}\right]_0^y = ce^{-by}\frac{e^{-by}-1}{-b} = \frac{c}{b}\left(e^{-by}-e^{-2by}\right)$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\frac{c}{b}\left(e^{-by}-e^{-2by}\right)dy = \frac{c}{b}\left[\frac{e^{-by}}{-b}-\frac{e^{-2by}}{-2b}\right]_0^{+\infty} = \frac{c}{b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2b}\right) = \frac{c}{2b^2}$$

Les paramètres c et b doivent donc vérifier $\frac{c}{2b^2} = 1$, c'est-à-dire $c = 2b^2$.

3) On suppose que $c = 2$ donc d'après ce qui précède on a nécessairement $b = 1$ $(b > 0)$.

On sait que si $x \leq 0$, $f_{X,Y}(x,y) = 0$ pour tout $y \in R$ donc si $x \leq 0$, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = 0$.

Considérons maintenant le cas $x > 0$. Dans ce cas $f_{X,Y}(x,y) = 0$ pour tout y en dehors de l'intervalle $]x,+\infty[$ donc

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^{+\infty} 2e^{-(x+y)}dy = 2e^{-x}\int_x^{+\infty} e^{-y}dy = 2e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_x^{+\infty} = 2e^{-2x}$$

Conclusion :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & si \quad x > 0 \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

De façon similaire on montre en utilisant la formule $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$ que:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\left(e^{-y}-e^{-2y}\right) & si \quad y > 0 \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

On remarque que la relation $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$ n'est pas vérifiée pour tout $(x,y) \in R^2$ ce qui implique que X et Y ne sont pas indépendantes.

4) La densité conditionnelle de $X \mid Y = y$ n'est calculable que pour un réel y tel que $f_Y(y) \neq 0$, c'est-à-dire d'après la question précedente $y > 0$.

Soit donc $y > 0$. On a $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ or

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & si \quad 0 < x < y \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

donc

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{2e^{-(x+y)}}{2(e^{-y}-e^{-2y})} & si \quad 0 < x < y \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-y}} & si \quad 0 < x < y \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

De même, la densité conditionnelle de $Y \mid X = x$ n'est calculable que pour $x > 0$. Soit donc $x > 0$. On a $f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ or

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & si \quad 0 < x < y \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

donc

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{2e^{-(x+y)}}{2e^{-2x}} & si \quad 0 < x < y \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} e^{x-y} & si \quad 0 < x < y \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

5) Par définition : $E(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X=x}(y)dy$ donc d'après ce qui précède $E(Y \mid X = x) = \int_x^{+\infty} ye^{x-y}dy = e^x \int_x^{+\infty} ye^{-y}dy$. Pour calculer cette intégrale, on doit faire une intégration par parties.

Rappel : Formule d'intégration par parties

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

On applique cette formule dans le cas particulier $a = x$, $b = +\infty$, $u = y$ ($\Longrightarrow u' = 1$) et $v' = e^{-y}$ ($\Leftarrow v = -e^{-y}$) et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} ye^{-y}dy &= \left[-ye^{-y}\right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-y}dy \\ &= xe^{-x} + \left[-e^{-y}\right]_x^{+\infty} \\ &= xe^{-x} + e^{-x} \end{aligned}$$

d'où

$$E(Y \mid X = x) = e^{-x}\left(xe^{-x} + e^{-x}\right) = x + 1$$