TD 4

Exercice 5 (après correction de l'énoncé)

Il y a une erreur dans l'énoncé : la fonction $f(y;\theta)$ n'est pas une fonction de densité (son intégrale sur R n'est pas égale à 1). Pour avoir une fonction de densité il faut faire la modification suivante :

$$f(y;\theta) = \begin{cases} -(\theta+1)\,y^{-\theta-2} & si \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

et supposer que $\theta < -1$ pour que le terme $-(\theta+1)\,y^{-\theta-2}$ soit strictement positif (en effet si ce terme est nul alors $f(y;\theta)$ est nulle sur R et par conséquent son intégrale sur R ne peut pas être égale à 1, et s'il est strictement négatif alors $f(y;\theta)$ est strictement négative sur $]0,1[$ ce qui va à l'encontre du caractère positif d'une fonction de densité).

Remarque: on note la densité $f(y;\theta)$ (au lieu de $f(y)$) pour bien expliciter la dépendance en θ de cette densité.

Afin d'utiliser la méthode des moments, nous devons obtenir une expression de θ en fonction de moments du type $E(g(Y))$, où g est une fonction. Pour cela, essayons d'exprimer $E(Y)$ en fonction de θ. Par définition de l'espérance d'une variable aléatoire continue sur R, on a :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y;\theta) dy = -\int_0^1 y\,(\theta+1)\,y^{-\theta-2} dy = -\int_0^1 (\theta+1)\,y^{-\theta-1} dy$$

donc

$$E(Y) = -(\theta+1)\int_0^1 y^{-\theta-1} dy = -(\theta+1)\left[\frac{y^{-\theta}}{-\theta}\right]_0^1 = -(\theta+1)\frac{1}{-\theta}$$

donc :

$$E(Y) = \frac{\theta+1}{\theta} \tag{1}$$

Il s'agit maintenant d'exprimer θ en fonction de $E(Y)$. On a d'après (1), $\theta E(Y) = \theta + 1$ donc $\theta(E(Y)-1) = 1$ d'où

$$\theta = \frac{1}{E(Y)-1}$$

Le dénominateur $E(Y)-1$ est bien différent de 0. En effet, $E(Y) = \frac{\theta+1}{\theta} = 1 + \frac{1}{\theta} < 1$ car le paramètre θ est négatif par hypothèse.

La méthode des moments consiste à estimer les moments théoriques par les moments empiriques. L'estimateur par la méthode des moments de θ est donc :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{Y}-1}$$

où $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ est la moyenne empirique des observations Y_i.