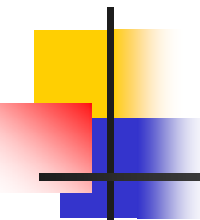


# Plan du cours de Statistique Appliquée

François Gardes-Patrick Sevestre  
2005-2006



- 
- 
- **Chapitre I** : Rappels
  - **Chapitre II**: Eléments d'échantillonnage (Tassi, Chap. 2, Kauffmann, Chap. 5 et 6)
  - **Chapitre III**: L'information au sens de Fisher (Kauffmann, chap. 7)
  - **Chapitre IV**: Estimation (Tassi, deuxième partie)
  - **Chapitre V** : Tests (Tassi, troisième partie, TD 1)
  - **Chapitre VI** : Estimation et Tests par la méthode des MCO
  - **Chapitre VII** : Compléments (aperçu sur les tests qualitatifs, la statistique non paramétrique, les problèmes d'identification, l'inférence Bayésienne, les plans d'expérience pour l'évaluation des politiques publiques)



# Bibliographie

---

- Dormont, B., 1998, Introduction à l'Econométrie, Montchrestien
- Greene, W.H., 2000, *Econometric Analysis*, Prentice Hall, 4th edition
- Griffith, W., Hill, R. C., Judge, G., 1993, *Learning and Practicing Econometrics*, Wiley
- Judge, G., Hill, R., Griffith, W., Lütkepohl, H., Lee, T.C., 1988, *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley
- Kauffmann, Pascal, 1994, *Statistique: Information, Estimation, Tests*, Dunod
- Pradel, J., Site personnel sur le site d'Euréqua (Université Paris I)
- Tassi, P., 1985, *Méthodes Statistiques*, Economica



# Présentation

---

- Echantillon, population statistique; prévision (note/temps de travail)
- Modèles/Théorie: problèmes d'agrégation, de non-linéarité, de simultanéité
- Types de données ; biais de sélection
- Causalité :
  - \*exemple Salaire/éducation ;
    - condition ceteris paribus ;
    - effets partiels



# Présentation

---

- Identification ; tests de restrictions
- Spécification
- Comparaison de résultats d'estimation ; procédures de test
- Expérimentation
- Hétérogénéité non expliquée



# Chapitre I: Rappels

---

- Rappels de probabilité
- Exemples de lois de probabilité
- Les différents types de convergence: en loi, en probabilité, presque sûre
- Les distributions jointes
- Lois normales jointes
- Les familles de lois exponentielles

# Les convergences stochastiques 1

- Comportement aux limites de phénomènes aléatoires: échantillons dont la taille augmente
- (a) Convergence en loi: convergence simple d'une suite de fonctions
- $f_n$  converge vers une limite  $f$  en  $x \square$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x \square)$

La suite de variables aléatoires  $X_n$  converge en loi vers la v.a.  $X$  si la suite des fonctions de répartition  $F_n$  associées aux v.a.  $X_n$  converge simplement vers la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .

# Les convergences stochastiques 2

- Exemple
- v.a. discrète
- Propriétés: \* *Th de Slutsky*:  $\varphi(X_n)$  converge en loi vers  $X$  si la fonction  $\varphi$  est continue
- \* *Théorème Central Limite*: Soit  $(X_n)$  une suite de v.a. indépendantes et de même loi, admettant des moments finis



# Les convergences stochastiques 3

- jusqu'à l'ordre 2. n note  $E(X_n)=m$ ,  
 $V(X_n)=\sigma$ ,  $MX_n = \dots$
- Alors la suite  $1/\sqrt{n}(X_n - m)/\sigma$  converge  
en loi vers un v.a. centrée réduite de loi  
normale centrée réduite  $N(0,1)$
- Application à l'approximation de lois de  
probabilité

# Les convergences stochastiques 4

- (b) Convergence en probabilité:
- $\text{Plim } X_n = c$  ssi  $\text{Prob}(|X_n - c| > \varepsilon) \rightarrow 0$   
quand  $n \rightarrow \infty$  Exemple
- Cas spécial: cv en moyenne  
quadratique
- Propriétés de la convergence en loi



# Les convergences stochastiques 5

---

- Applications: (i) Approximation des lois de probabilité
  - (ii) revenu relatif
  - (iii) exercice

# Les convergences stochastiques 6

c) Convergence presque sûre: plus exigeante bien qu'assez proche de la Cv en Proba.

■  $X_n \rightarrow X$  ssi  $\text{Prob}(\text{Sup}_{k>n} |X_k - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$

*Application*: Loi Forte des Grands  
Nombres



# Les distributions jointes

---

- 1. Définition
- 2. Indépendance de deux v.a.
- 3. Espérance
- 4. Exemple
- 5. Lois normales jointes dans  $\mathbb{R}^n$
- 6. Distribution d'une fonction de v.a.



# Chap. II: L'échantillonnage 1

---

- Introduction
- 1. Echantillonnage sur une population de taille finie
  - 1.1. Tirage de l'échantillon avec remise
  - 1.2. Tirage de l'échantillon sans remise
  - 1.3. Moyenne empirique associée à un échantillon



# Exercices sur l'échantillonnage

---

- *Exercice 1:* On considère une v.a. observée sur une population, avec une moyenne  $m$  et une variance  $\sigma^2$ . on tire un échantillon  $E=(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de taille  $n=36$ , puis un second échantillon  $E'=(X'_1, X'_2, \dots, X'_{n'})$  de taille  $n'$ .
- 1) Quelle est la distribution limite de la moyenne empirique de  $E$ ? de  $E'$ ?
- 2) Quelle est la distribution la moins dispersée?
- 3) Si  $V(mX)=4$  et  $n'=120$ , calculer  $v(X')$ .



# Exercices sur l'échantillonnage

---

- *Exercice 2:* On considère un échantillon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tiré d'une population de moyenne  $m$ , de variance  $\sigma^2$ . On propose deux estimateurs de  $m$ :
  - $m_1 =$  moyenne empirique sur l'échantillon
  - $m_2 = (X_1 + X_2)/2$
  - Comparer ces deux estimateurs.





# Chap. II: L'échantillonnage 2

---

- 13.1. Définition
- 13.2. Echantillon tiré avec remise
- 13.3. Echantillon tiré sans remise
- 1.4. Variance empirique associée à un échantillon
- Propriété 1:

$$E(S_n^2) = \sigma_x^2 - V(X_n)/n$$



# Chap. II: L'échantillonnage 3

---

- Prop 2:  $E(S^2_n) = [(n-1)/n]\sigma_x^2$  pour un tirage sans remise
- Prop 3:  $E(S^2_n) = [N/(N-1)][(n-1)/n]\sigma_x^2$  pour un tirage avec remise
- Démonstration: Prop 2  $\rightarrow$  Prop 3  $\rightarrow$  Pr1



# Chap. II: L'échantillonnage 4

---

- II. Echantillonnage d'un processus aléatoire:
  - 2.1. Définition
  - 2.2. Moyenne empirique sur un échantillon
  - 2.3. Variance empirique sur un échantillon



# Chap. II: L'échantillonnage 5

---

- III. Echantillons d'une loi normale:
- 3.1. Propriétés des moyennes et variances empiriques
- 3.2. Le théorème de Fisher
- 3.3. Conséquences



# Ronald Aylmer Fisher

---

- 1890 (Londres)-1962 (Adelaide)
- Collèges Gonville et Caius à Cambridge
- Professeur de génétique, Cambridge
- Contributions à la génétique et à la statistique appliquée et théorique: distribution du coefficient de corrélation, théorie de l'estimation, analyse de la variance, publication de tables statistiques.
- Théorème fondamental de la sélection naturelle, socio-biology, usage de la théorie des jeux en biologie évolutionniste (stratégie mixte)



# Rappels

---

- Rappel sur les lois de Bernouilli, binomiales et multinomiales
- Exercice d'échantillonnage



# Rappel sur les lois discrètes 1

---

- Loi de Bernouilli:

- $f(y|\theta) = \theta^y(1-\theta)^{1-y}$  pour  $y=0,1$   
=0 sinon

$$f(0|\theta) = \theta; f(1|\theta) = 1-\theta; f(y|\theta) = 0$$

pour  $y$  différent de 0 et 1

$$m = \theta; \sigma^2 = \theta(1-\theta)$$



# Rappel sur les lois discrètes 2

---

- Loi Binomiale: T expériences de Bernouilli *indépendantes* (H1) et de probabilité  $\theta$  constante (H2)
- $\mathcal{B}(T, \theta)$
- Exemple: T tirages répétés *avec remise*
- $f(y|\theta) = \binom{T}{y} \theta^y (1-\theta)^{1-y}$  pour  $y=0,1,\dots,T$   
=0 sinon  
 $m=T\theta; \sigma^2 = T\theta(1-\theta)$





# Rappel sur les lois discrètes 3

---

- Loi Multinomiale:
- $f(y|\theta_1, \theta_1, \dots, \theta_k) = (y! / y_1! y_2! \dots y_k!) \theta^{y_1} \dots \theta^{y_k}$
- Lois marginales:  $B(y_j|\theta_j)$
- $E(y_i|\theta_j) = T\theta_j; V(y_j) = T \theta_j(1 - \theta_j);$
- $cov(y_i, y_l) = -T \theta_j \theta_l$



# Rappel sur les lois discrètes 4

---

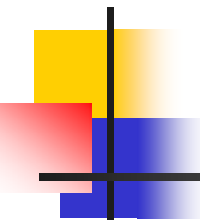
- Loi hypergéométrique: tirages *sans remises*
- Exemple: comité universitaire
- Loi de Poisson:  $\mathcal{P}(\lambda)$ : nombre d'occurrences par unité de temps
- $F(y|\theta) = (1/y!) \lambda^y \exp(-\lambda)$



# Chapitre III: L'information au sens de Fisher (Kauffmann, chap. 7)

---

- **I. L'inf au sens de Fisher pour un paramètre réel**
  - 1.1. Notations et hypothèses
  - 1.2. Score et quantité d'information
  - 1.3. Interprétation: Positivité, additivité
  - 1.4. Calcul de l'information fournie par une v.a. réelle sur un paramètre réel
  - 1.5. Exemples: loi binomiale, loi exponentielle, loi normale
- **II. Extension pour un ensemble de paramètres**

- 
- 
- Chap. IV: Estimation ponctuelle d'un paramètre (Kauffmann, 8, 9.2, 9.1)
  - Chap. V: Estimation par intervalle de confiance (Kauffmann, 10)
  - Chap. VI: Tests sur les moyennes et les variances d'une distribution (Kauffmann, 13)
  - Chap. VII: Estimation et tests dans le modèle de régression multiple (Greene, 4 ou 5)