

## Examen de Statistique et Econométrie

**Licence de Sciences Economiques, Jeudi 19 Janvier 2006,  
8h30-11h30**

### Exercice (3 points):

On considère un échantillon  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tiré d'une population de moyenne  $m$ , de variance  $\sigma^2$  avec  $n > 30$ . On propose deux estimateurs de  $m$ :

$$m_1 = \text{moyenne des } (n-3) \text{ premières valeurs} = \sum_{i=1}^{n-3} x_i$$

$$m_2 = (x_1 + x_{n-1})/2$$

Comparer ces deux estimateurs du point de vue de leur biais et de leur efficacité.

### Problème (14 points)

Un de vos anciens camarades, ayant fait un DEUG d'économie avec vous, a décidé de quitter l'Université pour s'inscrire dans une école privée récemment créée, CEDUVAN. Pour justifier ce choix, il vous dit que la brochure de cette école présentait les profils de 16 étudiants de la première promotion, sortant avec un diplôme de niveau Bac+5. 80% d'entre eux avaient trouvé un emploi en moins de 6 mois et leur salaire d'embauche moyen était supérieur à 1500 Euros nets mensuels. D'après lui, ces éléments sont une preuve que les écoles privées fournissent de meilleures garanties pour l'insertion professionnelle des étudiants que ce n'est le cas pour l'Université.

Vous-même et l'une de vos camarades, étudiant(e)s sérieux(se) et intelligent(e)s, ne vous arrêtez pas à cette argumentation et décidez de parier avec lui un repas dans un bon restaurant que vous lui pourrez lui montrer de façon rigoureuse qu'il se trompe et qu'il a fait le mauvais choix.

Pour cela, vous décidez de faire une enquête auprès d'anciens étudiants de l'Université, sortis avec un DEA (groupe 1) ou un DESS (groupe 2) à qui vous demandez quel était leur salaire d'embauche.

Vous supposerez que la distribution des salaires peut être approximée par une distribution normale d'espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ .

1) Montrez que l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $m$  est donné par la moyenne empirique des salaires.

ii

- 2) Calculez l'espérance et la variance de cet estimateur.
- 3) Est-il convergent en moyenne quadratique ? en probabilité ? Quel est l'intérêt, en pratique, de la convergence de cet estimateur ?
- 4) Vous-même et votre camarade obtenez les résultats suivants, chacun ayant interrogé un nombre  $N_i$  d'étudiants,  $i = 1, 2$ ; où  $\bar{x}$  représente la moyenne empirique et  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2$

Tableau 1: Estimations pour chaque groupe

	Groupe 1	Groupe 2
$\bar{x}_{(i)}$	1700	1400
$\hat{\sigma}_{(i)}^2$	$(700)^2$	$(400)^2$
$N_{(i)}$	100	225

Peut-on admettre l'hypothèse que les salaires moyens sont les mêmes pour les étudiants diplômés d'un DEA et ceux diplômés d'un DESS ?

- 5) Montrer que le meilleur estimateur du salaire moyen (i.e. sans biais et ayant la plus petite variance) calculé à partir des estimations sur ces deux groupes est donné par

$$\bar{x} = \frac{N_{(1)}}{N} \bar{x}_{(1)} + \frac{N_{(2)}}{N} \bar{x}_{(2)}$$

Montrer que cet estimateur a une variance plus petite que celle des estimateurs calculés sur chaque groupe séparément. Est-ce attendu ?

- 6) Construisez des intervalles de confiance à 95% pour le salaire moyen, à partir des observations relatives aux groupes 1 et 2 séparément, puis pour les deux groupes réunis. Qu'observez-vous ?

- 7) Par ailleurs, à partir des informations de la brochure de son école, votre camarade aboutit aux estimations suivantes des caractéristiques de la distribution des salaires des diplômés de l'école privée CEDUVAN

Tableau 2: Estimations pour l'école privée CEDUVAN

	Ecole CEDUVAN
$\bar{x}_{(ceduvan)}$	1550
$\hat{\sigma}_{(ceduvan)}^2$	$(600)^2$
$N_{(ceduvan)}$	16

Construisez un intervalle de confiance à 95% pour le salaire moyen des anciens étudiants de l'école privée CEDUVAN.

8) Testez au seuil  $\alpha = 0.05$  l'hypothèse  $H_0$  selon laquelle le salaire moyen à l'embauche des étudiants de l'Université est supérieur à celui des étudiants diplômés de CEDUVAN.

9) Votre camarade parti chez CEDUVAN vous oppose le fait que si vous testez l'hypothèse  $H_0$  selon laquelle le salaire moyen à l'embauche des étudiants de CEDUVAN est supérieur à celui des étudiants diplômés de l'Université, vous accepterez  $H_0$ .

Vérifiez qu'il ne se trompe pas. Qu'avez-vous à répondre à et argument ?

10) Ecrire un modèle économétrique permettant de mesurer l'effet du diplôme (Ecole ou Université) sur le salaire d'embauche, toutes choses égales par ailleurs. Quelles hypothèses faut-il faire pour que l'estimateur des MCO des coefficients soit sans biais ?

11) Quel vous paraît être l'avantage d'une telle modélisation économétrique par rapport aux tests de moyennes des questions précédentes ?

### Questions de cours(3 points) :

1. On considère la densité  $f(X, \mu)$  du vecteur  $X$  dépendant du vecteur de paramètres  $\mu$ . Justifiez la définition de la quantité d'information au sens de Fisher :  $I_x(\mu) = E(S^2(X, \mu))$  avec  $S$  le score du paramètre  $\mu$  :  $S(X, \mu) = \partial \ln f(X, \mu) / \partial \mu$ . Pourquoi dit-on que cette information est positive et additive ?

2. Justifiez la différence des variances des moyennes empiriques d'une variable aléatoire  $x$  pour des échantillonnages :

- (a) fini avec remise ;
- (b) fini sans remise ;
- (c) infini.