Statistiques appliquées L3
Groupe 10 2006/2007

Interrogation n°1
Aucun document n'est autorisé

Exercice 1
On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y.
1- Déterminez la covariance entre X et Y
2- On suppose que $X \rightsquigarrow B(n_1, p)$ et $Y \rightsquigarrow B(n_2, p)$,
2-a Si $n_1 = 40$ et $p = 0,1$, Quelle approxiamtion peut-on utiliser pour la loi de X ? (Justifier) et pour la loi de Y sachant que $n_2 = 200$?
2-b Déterminez la loi de Z avec $Z = X + Y$.
Cette question sera traitée indépendamment de (2-a)
2-c Déterminer l'espérance et la variance de Z

Exercice 2
On considère un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) de densité conjointe :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ke^{-y} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- Déterminer la valeur de k.
2- Déterminer les lois marginales de X et de Y. Ces variables sont-elles indépendantes?
3- Déterminer les densités conditionnelle de $X/Y = y$ et de $Y/X = x$

Exercice 3

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale d'espérance m et de variance σ^2. Notons $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
1- Calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$. Quelle est la loi de $\bar{X}_n$?
2- Quel théorème permet de dire directement que $(\bar{X}_n)$ converge en probabilité vers m ?
3- Il est possible de démontrer la convergence en probabilité de $(\bar{X}_n)$ d'une autre façon:
Montrer, en utilisant le définition de la convergence en probabilité et l'inégalité de Tchebychev, que $(\bar{X}_n)$ converge en probabilité vers m.
4- Quel estimateur proposez vous pour l'espérence m ? Quelle est sa loi ?
5- Soit F étant la fonction de répartition de la loi normale standard $N(0,1)$ et soit $U \rightsquigarrow N(0,1)$.
Exprimer $P(|U| \leq u)$ en fonction de $F(u)$ (justifier).
6- On suppose que la variance σ^2est connue, $\sigma^2 = 9$, et que la moyenne des observations est égale à 20.
6-a- Déterminez l'intervalle bilatérale de confiance pour m au niveau de confiance 95% pour $n = 25$
6-b- Combien d'observations doit on avoir pour que la longueur de l'intervalle de confiance 95% soit inférieure à 2 ?