Statistiques appliquées – L3 ; TD 12

Vendredi 17 novembre 2006

Interrogation de contrôle continu n°1

Durée : 1h15

Aucun document n'est autorisé

Vrai ou faux?

Répondez par vrai ou faux, sans justifier. Ne perdez pas de temps sur cette partie.

1. Soient X et Y, deux variables aléatoires qui ne sont pas indépendantes, a un réel. $V(aX+aY)=a^2V(X+Y)$
2. Soient X et Y, deux variables aléatoires qui ne sont pas indépendantes, a un réel. $V(aX+aY)=a^2[V(X)+V(Y)]$
3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, X une variable aléatoire. Si la suite des fonctions de répartition des X_n converge vers la fonction de répartition de X, alors la suite de v.a. (X_n) converge en probabilité vers la v.a. X.
4. Si $\lim E(|X_n - X|^2) = 0$ quand $n \to +\infty$, alors $\lim P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$ quand $n \to +\infty$

Questions de cours

1. Donnez le théorème central limite.
2. Donnez trois hypothèses des moindres carrés ordinaires.
3. Qu'est-ce qu'une expérience naturelle? Quel en est l'intérêt? Donnez un exemple.

Exercice 1

On considère le couple de variables (X,Y) de fonction de densité conjointe:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8e^{-2(x+y)} & \text{si } 0 < x < y < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. X et Y sont-elles indépendantes?
2. Déterminez les densités marginales de X et de Y
3. Déterminez la densité conditionnelle de X/Y=y.

Exercice 2

Selon l'INSEE, le taux de salaire horaire brut moyen des hommes salariés employéss à temps complet en France était de $16,5$ € en 2004.

On suppose que le taux de salaire horaire brut est une variable aléatoire qui suit une loi normale (μ, σ^2). On suppose que la moyenne de la population des hommes salariés en France est $\mu = 16,5$ € et que l'écart-type de la population est $\sigma = 4$ €.

Un échantillon de 100 hommes salariés est sélectionné. On veut savoir dans quelle mesure il permet d'approcher correctement les caractéristiques de la population des hommes français salariés, et, notamment, leur salaire.

On associe à chaque salarié une variable aléatoire X_i qui représente son taux de salaire. i varie donc de 1 à 100. On suppose que les X_i sont indépendants et identiquement distribués. On s'intéresse à la moyenne des X_i, qu'on note $\bar{X}_{100}$.

$$\bar{X}_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$$

1. Calculez l'espérance et la variance de $\bar{X}_{100}$. Quelle loi suit $\bar{X}_{100}$?
2. On s'est intéressé à $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, moyenne de n observations d'une variable aléatoire, car $\bar{X}_n$ converge en probabilité vers μ lorsque n tend vers l'infini.
   a) Donnez le théorème qui permet de dire directement que $(\bar{X}_n)$ converge en probabilité vers μ lorsque n tend vers l'infini.
   b) Il est possible d'arriver à ce résultat sans utiliser ce théorème. En utilisant l'inégalité de Chebychev et la définition de la convergence en probabilité, montrez que $(\bar{X}_n)$ converge en probabilité vers μ lorsque n tend vers l'infini.
3. Cependant, ici n vaut 100. On veut savoir si $\bar{X}_{100}$ risque s'écarter beaucoup de μ.
   a) Soit U, une v.a. de loi $N(0,1)$. On note $\Phi(.)$ la fonction de répartition de U. Exprimez $P(|U| < u_0)$ en fonction de $\Phi(u_0)$. Quelle propriété d'une $N(0,1)$ utilise-t-on?
   b) Quelle est la probabilité que la valeur absolue de la différence entre la moyenne de l'échantillon, $\bar{X}_{100}$, et la moyenne de la population, μ, soit plus petite que $0,4$ € ?
   c) Quelle est la probabilité que la moyenne de l'échantillon s'écarte, au plus, de plus ou moins $1,2$ € de la moyenne de la population ?
   d) De combien la moyenne de l'échantillon s'écarte-t-elle au plus de la moyenne de la population avec une probabilité de $0,6826$?