Statistiques Appliquées (L3)

Groupe n° 16 - Novembre 2006

Contrôle continu N°1

Les calculatrices sont autorisées. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Vrai ou Faux (3 points).

Répondez par Vrai ou Faux. *Une bonne réponse vaut + 0,5 point et une mauvaise -0,25 point.*

1. Si la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire X alors la suite X_n converge presque sûrement vers X.
2. L'espérance d'une loi binomiale $B(n, p)$ est égale à np.
3. Le R^2 d'une estimation sur données individuelles est plus faible que celui obtenu après agrégation.
4. U est une loi normale standard $P(U > 0.52)$ vaut $0,3050$.
5. Deux variables aléatoires indépendantes ont une covariance nulle.
6. A et B sont deux évènements indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Exercice 2 : Lois usuelles. (4 points)

Soit X une variable aléatoire de loi normale telle que $P(X < 1.1) = 0,33$ et $P(X > 10) = 0,0202$, calculez la valeur de u telle que : $P[(X - E(X))^2 < u] = 0.90$.

Exercice 3 : Densités conjointes et marginales (6 points)

La densité d'un couple (X, Y) de variables aléatoires est définie par :

$f(x, y) = kxy$ si $(x, y) \in D$

$f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin D$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$

1. Déterminer k.
2. Déterminer les densités marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes?
4. Calculer l'espérance de X et de Y puis la covariance de X et Y.
5. Calculer l'espérance conditionnelle de $X/Y = y$.

Exercice 4 : Convergence en probabilité (3 points)

Soient les variables aléatoires indépendantes X suivant une loi normale $N(0,1)$ et Z_n telles que $E(Z_n) = 0$ et $V(Z_n) = \frac{1}{n^2+3}$. On définit $X_n = X + Z_n$. Rappeler la définition de la convergence en probabilité et montrer que X_n converge en probabilité vers X.

Exercice 5 : Echantillonnage. (7 points)

Un institut de sondage souhaite connaitre la popularité d'un candidat à la prochaine élection présidentielle, il interroge 300 personnes et obtient que 165 personnes seraient prêtes à voter pour ce candidat et 135 ne voulant pas voter pour lui. Nous nous intéressons à la probabilité p qu'un individu pris au hasard veuille voter pour ce candidat, nous supposons que les réponses sont indépendantes les unes des autres.

1. Décrire le modèle statistique correspondant : variable aléatoire observée? nombre d'observations? loi des observations?

2. Quel estimateur proposez-vous pour p? Quelle est l'estimation correspondante aux observations faites pas l'institut de sondage?

3. Quelle est la loi de cet estimateur?

4. Construisez un intervalle bilatéral de confiance à 95% pour p et calculez l'intervalle.