Statistiques Appliquées
Contrôle Continu N°1
TD N°3 et 4

Gwenn PARENT

Aucun document ni formulaire n'est autorisé. Vous disposez d'1h15. L'interrogation est notée sur 22,5 points.
ATTENTION... RETOURNEZ LA FEUILLE, SUITE AU VERSO!!!!!

Questions de cours : (2 points)

1. Rappelez l'énoncé du théorème Central-Limite. *(1 point)*
2. Qu-est ce qu'un estimateur sans biais? *(1 point)*

Exercice 1 : Formule de Bayes (2 points)

Un étudiant doit répondre à un questionnaire à choix multiple où cinq réponses sont proposées à une question, une seule étant correcte. Quand l'évènement $A =$ "l'étudiant a bien travaillé pendant l'année" est réalisé, la réponse est fournie avec exactitude. Dans le cas contraire, l'étudiant répond au hasard. Si l'évènement $B =$ "il a fourni la réponse correcte" est réalisé, calculez la probabilité $P(A \setminus B)$ en fonction de $p = P(A)$.

Exercice 2 : Fonction de densité conjointe (4,5 points)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est déterminée par la densité conjointe suivante :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k(x+y) & \text{si } (x, y) \in [0,1] \times [0,x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminez la valeur de la constante k. *(2 points)*
2. Déterminez les lois marginales de X et de Y. Ces variables sont-elles indépendantes? *(1,5 points)*
3. Déterminez les densités conditionnelles de $X \setminus Y = y$ et de $Y \setminus X = x$. *(1 point)*

Exercice 3 : Intervalle de confiance (8 points)

Une entreprise de télécommunications cherche à développer un nouveau produit, et charge ses télé-opérateurs de contacter une base de 4000 clients pour leur proposer ce nouvel abonnement. Ils obtiennent 720 retours positifs de la part de leurs clients. Nous nous intéressons à la probabilité p de réponse favorable pour chaque appel et nous pouvons supposer que les comportements des individus sont indépendants les uns des autres.

1. Décrire, avec précision le modèle statistique correspondant à ces observations : quelle est la variable aléatoire observée, quel est le nombre d'observations, quelle est la loi de ces observations? *(1,5 points)*

2. Quel estimateur proposez-vous pour p ? Quelle est l'estimation correspondant aux observations faites ? *(1 point)*
3. Quelle est la loi de cette estimateur ? A quelle condition peut-on utiliser l'approximation normale ? Vérifiez cette condition, et donnez l'estimateur qui sera utilisé. *(2 points)*
4. Construisez un intervalle bilatéral de confiance à 90% pour p, et calculez l'intervalle ici observé. *(3,5 points)*

Exercice 4 : Convergence en probabilité et inégalité de Tchebychev (6 points)

Soit $(X_1,\ X_2,\ ...\ X_{n+1})$ une suite de variables aléatoires de Bernouilli de même paramètre p, deux à deux indépendantes. On introduit pour tout entier naturel non nul $n \,\varepsilon\, N^*$, les variables aléatoires :

$$Y_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{2} \qquad et \qquad T_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n}$$

1. Déterminez la loi de Y_n : Quelles valeurs peut prendre Y_n ? Donnez la distribution de probabilité de Y_n, et calculez son espérance et sa variance. *(2 points)*
2. Calculez l'espérance et la variance de T_n. *(Attention, les Y_i ne sont pas indépendantes) (2 points)*
3. En déduire que $T_n \underset{\rightarrow}{P} p$. ($T_n$ converge en probabilité vers p). *(2 points)*