Statistiques Appliquées
Contrôle Continu N°1
TD N°5

Gwenn PARENT

Aucun document ni formulaire n'est autorisé. Vous disposez d'1h15. L'interrogation est notée sur 22,5 points.
ATTENTION... RETOURNEZ LA FEUILLE, SUITE AU VERSO!!!!!

Questions de cours : (2 points)

1. Donnez la définition de la convergence en probabilité. *(1 point)*
2. Rappelez l'énoncé du théorème Central-Limite. *(1 point)*

Exercice 1 : Formule de Bayes (2 points)

Dans une Coupe de France de football, l'équipe du Paris-Saint-Germain, de première division, estime qu'elle a 3 chances sur 4 de gagner si elle rencontre une équipe de D2 et qu'elle a 1 chance sur 3 de gagner si c'est une équipe de première division. Vous entendez rapidement à la radio parler de la défaite du PSG, mais ne savez pas contre qui l'équipe jouait son match. Sachant que la proportion d'équipes de D2 restant engagées dans la Coupe est p, calculez la probabilité que le PSG ait rencontré une équipe de D2, sachant que le club parisien a perdu son match.

Exercice 2 : Fonction de densité conjointe (7 points)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est déterminée par la densité conjointe suivante :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k\ e^{-(x+y)} & \text{si } (x,y) \in [0,+\infty] \times [0,x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminez la valeur de la constante k. *(2 points)*
2. Déterminez les lois marginales de X et de Y. Ces variables sont-elles indépendantes ? *(2 points)*
3. Déterminez les densités conditionnelles de $X \setminus Y = y$ et de $Y \setminus X = x$. *(1 point)*
4. Déterminez $E(X \setminus Y = y)$. *(2 points)*

Exercice 3 : Intervalles de confiance (6,5 points)

Nous pouvons considérer que la note finale sur 20 obtenue au contrôle continu de Statistiques est, pour chaque étudiant, une variable aléatoire Y, de loi Normale. Les notes obtenues l'année dernière par 5 groupes de TD (comprenant un total de 127 étudiants) sont supposées être des variables (Y_1, ..., Y_{127}) indépendantes et identiquement distribuées selon une loi Normale, d'espérance m et de variance $\sigma^2 = 13.08 = (3.617)^2$.

1. Quel est le meilleur estimateur de m ? Quelle est la loi de cet estimateur ? *(1,5 points)*
2. Construire un intervalle bilatéral I de confiance à 90% pour m. *(3 points)*
3. Application numérique : calculez l'intervalle obtenu précédemment sachant que la valeur moyenne observée sur les 5 groupes de TD de l'année dernière est égale à 10.14 : *(0,5 point)*

$$\overline{Y} = \frac{1}{127}\sum_{i=1}^{127} Y_i = 10.14$$

4. Si vous souhaitez prévoir la note qu'obtiendra un élève de Statistiques cette année (étudiant dans la même université que celle des 5 groupes de TD étudiés précédemment), en faisant l'hypothèse que sa note notée Y_{2007} est indépendante des 127 variables déja observées et suit la même loi qu'elles. Indiquez comment vous procéderiez pour calculer un intervalle de prévision pour Y_{2007} (Indiquez les étapes à suivre, et sur quelle variable vous vous baseriez, mais il n'est pas demandé de trouver l'intervalle de prévision). *(1,5 points)*

Exercice 4 : Convergence en probabilité et inégalité de Tchebychev (5 points)

Soit $(X_1,\ X_2,\ ...\ X_{n+2})$ une suite de variables aléatoires de Bernouilli de même paramètre p, deux à deux indépendantes. On introduit pour tout entier naturel non nul $n \varepsilon N^*$, les variables aléatoires :

$$Y_n = \frac{X_n \ - \ X_{n+2}}{2} \qquad et \qquad T_n = \frac{Y_1+Y_2+...+Y_n}{n}$$

1. Déterminez la loi de Y_n : Quelles valeurs peut prendre Y_n ? Donnez la distribution de probabilité de Y_n, et calculez son espérance et sa variance. *(2 points)*
2. Calculez l'espérance de T_n. *(1 point)*
3. On vous donne la variance de T_n : $V(T_n) = \frac{p(1-p)}{n^2}$. En déduire que $T_n \underset{\rightarrow}{P} 0$. ($T_n$ converge en probabilité vers 0). *(2 points)*

Bonus *: Redémontrez que* $V(T_n) = \frac{p(1-p)}{n^2}$ *(+ 1,5 points bonus)*