Statistiques Appliquées (L3)

Groupe n° 6 - Novembre 2006

Contrôle continu N°1

Les calculatrices sont autorisées. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Vrai ou Faux (3 points).

Répondez par Vrai ou Faux. *Une bonne réponse vaut + 0,5 point et une mauvaise -0,25 point.*

1. Observer une corrélation entre deux variables implique que ces deux variables sont liées nécessairement par une forme de relation causale.

2. U est une loi normale standard, $P(U > 1)$ vaut $0,1587$.

3. La corrélation entre deux variables aléatoires binomiales est nulle, les deux variables sont donc indépendantes.

4. A et B sont deux évènements indépendants, A et $\overline{B}$ ne sont pas nécessairement indépendants.

5. Si la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire X alors la suite X_n converge en loi vers X.

6. Si $n > 15$, la loi $B(n, p)$ converge en loi vers la loi $N(np, np(1 - p))$.

Exercice 2 : Sortie de route. (4 points)

Pour se rendre à son travail un employé peut prendre deux routes. Par la route N°1, il met 27 minutes en moyenne avec un écart type de 2,5 (2 minutes et 30 secondes). Par la route N°2 il met 29 minutes en moyenne avec un écart-type de 1 minute. Dans les deux situations la durée des trajets suit une loi normale. L'employé choisit systématiquement d'emprunter la route par laquelle la probabilité d'arriverà l'heure est la plus forte.

Quelle est la route qu'il choisira pour se rendre au travail :

1. s'il dispose de 28 minutes?
2. s'il dispose de 32 minutes?

Exercice 3 : Densités conjointes et marginales (4 points)

La densité d'un couple (X, Y) de variables aléatoires est définie par :

$f(x, y) = kx^2y$ si $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 2$

$f(x, y) = 0$ sinon

1. Déterminer k.

2. Déterminer les densités marginales de X et Y.

3. X et Y sont-elles indépendantes?

4. Calculer l'espérance de X et de Y puis la covariance de X et Y.

Exercice 4 : Variable aléatoire et convergence (3 points)

Soient les variables aléatoires indépendantes X suivant une loi normale $N(0,1)$ et Z_n telles que $E(Z_n) = 0$ et $V(Z_n) = \frac{1}{n^3-1}$. On définit $X_n = X + Z_n$. Rappeler la définition de la convergence en probabilité et montrer que X_n converge en probabilité vers X.

Exercice 5 : Enoncer et démontrer le théorème de Bayes (2 points)

Exercice 6 : Echantillonnage. (6 points)

On admet que la durée de vie de lampes fluorescentes produites par un fabricant peut être représentée par une variable aléatoire normale X de moyenne m_X et d'écart-type σ_X. La durée de vie de 900 ampoules a été testée, on a obtenu que la moyenne des durées de vie était égale à 8 773,3 heures (soit 8 773 heures et 18 minutes) et l'écart-type égal à 872,4.

1. Donner un estimateur de la moyenne et démontrer les propriétés de l'estimateur. Que vaut l'estimateur sur l'échantillon?

2. Donner un intervalle de confiance au niveau 95% pour m_X.

3. Le fabricant inscrit sur les boîtes de lampes: "durée de vie des ampoules : 9 000 heures", cette affirmation vous semble-t-elle compatible avec les résultats obtenus?