Statistiques Appliquées
Contrôle Continu N°1

TD N°8 et 9
Mathieu VALDENAIRE

Les questions et exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Une attention particulière sera portée à la rédaction et à l'interprétation des résultats.

Questions de cours : (4 points)

1. Qu'est-ce qu'un estimateur (a) sans biais (b) efficace ? *(1 point)*
2. Dans quel cas la distribution jointe de deux variables aléatoires est-elle égale au produit des distributions marginales ? *(1 point)*
3. Définir la convergence en probabilité. En quoi cette notion de convergence diffère-t-elle de la convergence en loi ? Quel est le lien logique entre les deux notions ? *(2 points)*

Exercice 1 (2,5 points)

Dans un pays donné et à l'occasion d'une élection, on sait que 70% des électeurs résident dans une zone urbaine, et 30% en zone rurale. On a constaté par ailleurs que parmi les habitants des zones urbaines, 60% des électeurs votent démocrate et 40% républicain. Enfin, les démocrates ont recueilli $52,5\%$ des suffrages sur l'ensemble de la population.
Lorsque l'on tire au hasard un électeur démocrate, quelle est la probabilité que celui-ci réside dans une zone urbaine ?

Exercice 2 : Fonction de densité conjointe (2,5 points)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi est déterminée par la densité conjointe suivante :

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2\ e^{-(x+y)} & \text{si } (x,y) \in [0,+\infty] \times [0,x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminez les lois marginales de X et de Y. Ces variables sont-elles indépendantes ?

(Suite au verso)

Exercice 3 : Intervalle de confiance (7 points)

Nous pouvons considérer que la note finale sur 20 obtenue au Baccalauréat est, pour chaque élève, une variable aléatoire Y, suivant une loi Normale. Les notes obtenues au Baccalauréat par 36 élèves de terminale S sont supposées être des variables (Y_1, ..., Y_{36}) indépendantes et identiquement distribuées selon une loi Normale, d'espérance m et de variance σ^2. Nous supposons cette variance connue : $\sigma^2 = 7.29 = (2.7)^2$.

1. Quel est le meilleur estimateur de m ? Quelle est la loi de cet estimateur ? Expliquer l'intérêt de construire un intervalle de confiance pour m.
2. Construire un intervalle bilatéral I_1 de confiance à 90% pour m.
3. Application numérique : calculer l'intervalle obtenu précédemment sachant que la valeur moyenne observée est égale à 11.1 :
$$\overline{Y} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} Y_i = 11.1$$
4. De quoi dépend la taille de cet intervalle de confiance ? Calculer un intervalle bilatéral I_2 de confiance à 95% pour m et comparer les résultats obtenus avec ceux de la question précédente.

Exercice 4 : Convergence en probabilité et inégalité de Tchebychev (5 points)

Soit (X_1, X_2, ... X_{n+2}) une suite de variables aléatoires de Bernouilli de même paramètre p, deux à deux indépendantes. On introduit pour tout entier naturel non nul $n \varepsilon N^*$, les variables aléatoires :

$$Y_n = \tfrac{X_n \ - \ X_{n+2}}{2} \qquad et \qquad T_n = \tfrac{Y_1+Y_2+...+Y_n}{n}$$

1. Déterminez la loi de Y_n : Quelles valeurs peut prendre Y_n ? Donnez la distribution de probabilité de Y_n, et calculez son espérance et sa variance. *(2 points)*
2. Calculez l'espérance de T_n. *(1 point)*
3. On vous donne la variance de T_n : $V(T_n) = \frac{p(1-p)}{n^2}$. En déduire que $T_n \underset{\longrightarrow}{P} 0$. ($T_n$ converge en probabilité vers 0). *(2 points)*