

Interrogation écrite 1

Aucun document n'est autorisé. Vous disposez de 1h. Toutes les questions sont indépendantes.

Vrai ou faux ? (3 points)

Répondez par vrai ou faux. Ne perdez pas de temps sur cette partie. Une bonne réponse vaut 0,5 point, une mauvaise -0,25.

1. Deux variables aléatoires indépendantes ont une covariance nulle
2. Si la suite (X_n) converge en loi vers le réel α , alors elle converge aussi en probabilité vers α .
3. La variance de la somme de deux variables aléatoires est la somme des variables aléatoires.
4. La somme de deux variables binomiales n'est pas une variable binomiale.
5. Une approximation d'une loi binomiale $B(10; 0, 2)$ est une loi de Poisson $\mathcal{P}(2)$.
6. Si $U \rightsquigarrow N(0, 1)$ et $Y \rightsquigarrow \chi_n^2$, alors $\frac{U}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \rightsquigarrow T_{n-1}$

Exercice 1 : fonction de densité conjointe (5 points)

On considère le couple de variables (X, Y) de fonction de densité conjointe :

$$\begin{cases} f_{x,y} = 8e^{-2(x+y)} & \text{si } 0 < x < y < +\infty \\ f_{x,y} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminez les densités marginales de X et de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculez la probabilité de l'événement $(X + Y < 1)$.

Exercice 2 : estimation par intervalle de confiance (8 points)

Une société fournisseur d'accès Internet qui propose une ligne téléphonique d'aide technique souhaite estimer le temps d'attente de ses clients lors de ce service. On suppose que X_i , la variable aléatoire décrivant le temps d'attente avant d'obtenir un opérateur, suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. La société fait appel à vous, cadre supérieur de STAT.COM, pour réaliser un sondage. Vous mesurez pour 100 personnes le temps d'attente.

Vous trouvez une moyenne empirique égale à 20 minutes et un écart-type empirique de 10 minutes.

1. Quel est le meilleur estimateur de m ? Quelle est sa loi ?
2. Donnez un intervalle de confiance bilatéral à 95 % de l'estimation de m .
3. La société fournisseur d'accès Internet souhaite obtenir une estimation de m à la minute près. Mesurer le temps d'attente vous coûte 1000 Euros comme coût fixe pour les 100 premiers appels et chaque mesure supplémentaire d'un temps d'attente vous coûte 5 Euros. Vous coûtez à votre employeur 500 Euros pour ce travail. Combien faut-il facturer la société fournisseur d'accès Internet pour que STAT.COM puisse faire 10 % de bénéfice, en supposant que $\sigma = 10$?

Exercice 3 : Inégalité de Chebychev (4 points)

Soient les variables aléatoires indépendantes X suivant une loi normale $N(0,1)$ et Z_n telles que $E(Z_n) = 0$ et $V(Z_n) = \frac{1}{n^2}$. On définit la suite de v.a. $\{X_n\}$ telles que $X_n = X + Z_n$. En utilisant l'inégalité de Chebychev, montrer que X_n converge en probabilité vers X.