Statistiques appliquées (L3)
2005/2006

Interrogation écrite n°1

Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 (4 points)

On considère un couple de variables (X, Y) de densité conjointe:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3x^2y & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le \sqrt{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- Vérifier que $f_{X,Y}$ est une fonction de densité de probabilité.
2- Calculer les densités marginales de X et de Y.
3- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2 (8 points)

Soit $X_1, X_2, .., X_n$ un échantillon i.i.d. tiré dans une loi continue uniforme sur l'intervalle $[\theta, 2\theta]$ où $\theta \in]0, +\infty[$ est un paramètre inconnu.

1- Déterminer, en fonction de θ , la fonction de densité de X_i ainsi que son espérance qu'on notera m et sa variance qu'on notera σ^2.

2- Donner un estimateur convergent de m. En déduire un estimateur convergent $\hat{\theta}_n$ de θ.

3- Calculer l'espérance et la variance de l'estimateur $\hat{\theta}_n$.

4- En supposant que n est suffisamment grand, donner une approximation de la loi de $\hat{\theta}_n$ et déterminer un intervalle de confiance bilatéral pour θ au niveau de confiance 95%. On rappelle que si $U \sim N(0,1)$ alors $P(|U| \le 1.96) = 0.95$

A.N. : déterminer l'intervalle de confiance pour $n = 500$ et $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = 10$

Exercice 3 (8 points)

Soit $(X_i)_{i \in N}$ une suite de variables aléatoires de Bernouilli de même paramètre p et indépendantes deux à deux: $X_i \overset{iid}{\sim} B(1,p)$.

On définit pour tout $i \in N$ la variable aléatoire $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1- Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_i ?

2- Calculer $P(Y_i = 1)$. Quelle est la loi de Y_i ? Déterminer son espérance et sa variance.

3- Soit

$$S_n = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{n}$$

3-a- Déterminer $E(S_n)$.

3-b- Calculer $P(Y_i = 1 \text{ et } Y_{i+1} = 1)$. Que peut-on dire des variables Y_i et Y_{i+1} ?

3-c- Peut-on écrire que $Var(S_n) = \frac{1}{n^2}(Var(Y_1) + Var(Y_2) + ... + Var(Y_n))$? Justifier.

3-d- On admet que $Var(S_n) = \frac{p^2(1-p^2)}{n} + \frac{2(n-1)}{n^2}(p^3 - p^4)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|S_n - p^2\right| > \varepsilon\right) = 0$$