

Interrogation écrite 2

Aucun document n'est autorisé. Vous disposez de 1h25.

Vrai ou faux ? (3 points)

Répondez par vrai ou faux sur votre copie. Une bonne réponse vaut 0,5 point, une mauvaise -0,25.

1. Un estimateur est convergent si et seulement si son espérance est égale au paramètre estimé, $E(\theta) = \theta$.
2. La moyenne empirique d'une variable X_i qui suit une loi normale de paramètres m et σ suit une loi normale de paramètres m et σ .
3. Un intervalle de confiance à 95 % est construit à partir d'un unique échantillon de telle sorte que la vraie valeur du paramètre estimé se trouve dans cet intervalle avec une probabilité de 95 %.
4. La variance d'une loi de Bernouilli de paramètre p est $\frac{(1-p)}{p^2}$.
5. Lorsqu'on augmente la précision d'un intervalle de confiance (un échantillon donné), la taille de l'intervalle augmente.
6. Lorsque la taille de l'échantillon augmente, la taille de l'intervalle de confiance (pour une précision donnée) augmente.

Le Paludisme

Le paludisme, appelé aussi malaria, tue un enfant toutes les 30 secondes en Afrique et entre 1 et 3 millions de personnes par an, selon les estimations de l'OMS. Deux milliards d'individus, soit 40% de la population mondiale, sont exposés et on estime à 500 millions le nombre de cas cliniques survenant chaque année. Les moyens de lutte existants sont les médicaments antipaludéens (comme la chloroquine ou la quinine) et la lutte contre les moustiques vecteurs du Plasmodium. Ce parasite est transmis par la piqûre de la femelle d'un moustique appelé anophèle, qui se reproduit dans les zones marécageuses.

Aucun vaccin n'est aujourd'hui disponible.

A - Test d'un vaccin (9 points)

Une société pharmaceutique PALUDIS¹ a mis au point un prototype de vaccin. La première étape consiste à tester l'efficacité de ce vaccin sur des souris. 1000 souris sont sélectionnées, vaccinées et puis on leur injecte le parasite Plasmodium. On obtient comme résultat que 40 % des souris ne présentent aucun signe de malaria. Parmi les souris restantes, 50 % meurent.

Vous êtes statisticien chez PALUDIS et on vous demande de faire un rapport sur ces résultats.

1. Quels sont les deux types de résultat de l'efficacité du vaccin que vous avez envie de tester ? Lequel trouvez-vous plus intéressant ?
2. Quelle est la loi qui décrit la probabilité de survie ? Donnez sa densité, son espérance et sa variance.

¹Cette société et cette histoire de vaccin sont totalement imaginaires.

- Expliquez votre démarche statistique (quel estimateur, sa loi) et proposez un intervalle de confiance à 95 % de la probabilité de survie.
- Est-ce que ce test vous paraît suffisant pour évaluer l'efficacité du vaccin ? Suggérez un test sur un autre échantillon afin d'améliorer votre évaluation du prototype.
- On a suivi vos conseils et le test que vous avez souhaité a été réalisé. On obtient sur ce nouvel échantillon les résultats suivants : 30 % des souris survivent, les autres meurent. Testez l'hypothèse à 95 % que la probabilité de survie est différente dans les deux échantillons.

Aide en ligne : Pour tester la différence entre deux fréquences F_1 et F_2 , il suffit de tester que la différence $F_1 - F_2$ est différente de 0. Pensez à trouver d'abord la loi de la différence $F_1 - F_2$: Si F_1 suit $N(n_1, \sigma_1)$ et si F_2 suit $N(n_2, \sigma_2)$, quelle est alors la loi de $F_1 - F_2$?

B - Mise sur le marché d'un vaccin (4 points)

Après quelques mois de recherche supplémentaire pour améliorer le prototype, les résultats sont un succès. Néanmoins, pour pouvoir mettre sur le marché ce vaccin, il faut qu'il passe les tests de l'AFSSAPS (Agence française de sécurité sanitaire des produits de santé). Pour l'agence, il ne s'agit pas seulement de tester l'efficacité du vaccin, mais ses risques potentiels pour les individus sains vaccinés. Le vaccin peut causer une augmentation anormale du nombre de globules blancs. Le test exigé concerne 2000 individus sains à qui on injecte le vaccin, puis on dose le nombre de globules blancs. On simplifie le problème en disant qu'il n'y a que deux possibilités : soit la probabilité que le vaccin augmente le nombre de globule blanc est de 5 % ($p=0,05$) et il y a danger, soit cette probabilité est de 2 % ($p=0,02$) et le test valide l'exigence.

- Quel est le test que les experts de l'AFSSAPS souhaitent mettre en place ? Souhaitent-ils prendre ($p=0,05$) ou ($p=0,02$) comme hypothèse H_0 ? Expliquez leur choix et les erreurs qu'ils peuvent faire selon le test envisagé.
- Sur l'échantillon de 2000 personnes, on trouve en moyenne 3,2 % de cas où le test montre une augmentation du nombre de globules blancs. Effectuez le test choisi par les experts de l'AFSSAPS à 99 %. Précisez l'estimateur et sa loi.
- PALUDIS vous demande de faire un test plus favorable à la diffusion du vaccin. Que proposez-vous ?

C - Analyse économique du vaccin contre le paludisme (6 points)

Les zones infestées par la pandémie de paludisme concernent surtout l'Afrique (de l'Est, subsaharienne et équatoriale) et les zones rurales marécageuses en Asie. Il s'agit de pays parmi les plus pauvres de la planète. PALUDIS vous demande alors de faire une étude de marché sur les capacités des clients potentiels du vaccin. La Direction des Affaires Financières de PALUDIS a estimé qu'il faut que les patients gagnent au moins 400 Euros par mois pour pouvoir se payer le vaccin. Vous obtenez auprès de la Banque Mondiale des données sur ces pays : la moyenne des revenus (ou salaires) est de 300 Euros (5,7 en log) avec une variance du log de 0,5.

- Quelle loi vous apparaît comme appropriée pour estimer les revenus ? Donnez sa densité et calculez sa log-vraisemblance.
- Déterminez par la méthode du maximum de vraisemblance l'estimateur de la moyenne des revenus.
- Donnez une estimation de la probabilité que les salaires soient suffisants pour payer ce vaccin.
- Une organisation non gouvernementale, la Malaria Vaccine Initiative² a pour but de financer la recherche d'un vaccin contre la malaria. Imaginons que ce vaccin existe et coûte 12 Euros. Quel est le montant des dons nécessaires pour financer la vaccination des populations exposées qui ne peuvent pas se payer le vaccin (parmi les 2 milliards de personnes) ?

²Cet institut est totalement réel. C'est la fondation Bill and Melinda Gates qui l'a lancé avec un don de 300 millions de dollars. Vous pouvez retrouver des informations sur le site www.malariavaccine.org.