DEFINITION et PROPRIETES des PRINCIPALES LOIS de PROBABILITES

Notations

Si la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{L}$, on notera $X \approx \mathcal{L}$

Si n variables aléatoires $X_1, X_2, ...X_N$ sont indépendantes et suivent la même loi $\mathcal{L}$, on notera

$$\begin{aligned} X_1, X_2, ...X_N &\approx i.i.d.\mathcal{L} \\ i.i.d. &= \text{indépendamment et identiquement distribuées} \end{aligned}$$

Loi de Bernoulli : $B(1,p)$

Définition 1 *Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et on note $X \approx \mathrm{B}(1,p)$, si elle prend les deux seules valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives p et $1-p$.*

On peut écrire sa loi : $P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}$

Théorème 2 *L'espérance et la variance de $X \approx \mathrm{B}(1,p)$ sont*

$$E(X) = p \quad et \quad V(X) = p(1-p)$$

On utilise une telle variable aléatoire lorsque les résultats possibles d'une épreuve aléatoire sont réduits à deux : $[OUI - NON]$,$[VRAI - FAUX]$, etc...

Loi Binomiale : $B(n,p)$

Définition 3 *Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, et on note $X \approx \mathcal{B}(n,p)$, si elle prend les $(n+1)$ valeurs $0, 1, 2, ..., n$ avec les probabilités*

$$P(X=x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \quad pour \quad x = 0, 1, ..., n$$

Théorème 4 *L'espérance et la variance de $X \approx \mathrm{B}(n,p)$ sont*

$$E(X) = np \quad et \quad V(X) = np(1-p)$$

Une variable Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être interprétée comme la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p :

Théorème 5 *Si X_1, X_2,... $X_n \approx i.i.d.\mathcal{B}(1,p)$ alors $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathcal{B}(n,p)$.*

Corollaire 6 *Addition : Si $Y_1 \approx \mathcal{B}(n_1,p)$, $Y_2 \approx \mathcal{B}(n_2,p)$ et si Y_1 et Y_2 sont indépendantes, alors*

$$Y_1 + Y_2 \approx \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$$

Les probabilités $P(Y_n = x)$ sont de plus en plus difficiles à calculer lorsque n augmente. On utilise alors des approximations numériques, déduites des résultats de convergence suivants :

Théorème 7 *Convergences en loi lorsque n tend vers l'infini de $Y_n \approx \mathcal{B}(n,p)$*

1) Si $n \longrightarrow \infty$, $p \longrightarrow 0$ et $np \longrightarrow \lambda > 0$, alors $Y_n \xrightarrow{loi} \mathrm{P}(\lambda)$, loi de Poisson.

2) Si $n \longrightarrow \infty$, $F_n = \frac{Y_n}{n} \xrightarrow{proba} p$ et $\sqrt{n}(F_n - p) \xrightarrow{loi} N(0;1)$, loi Normale centrée réduite

La loi de Poisson $P(\lambda)$ et la loi Normale $N(0;1)$ sont décrites plus bas. La convergence en loi signifie qu'on peut utiliser la loi limite pour faire les calculs de probabilités concernant Y_n.

Si on considère que Y_n est la somme de n variables X_1, X_2,... X_n de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ indépendantes, Y_n représente le nombre de 1 observés parmi ces n tirages, la variable $F_n = \frac{Y_n}{n}$ représente la proportion de 1 observés dans l'échantillon et elle est la moyenne empirique de l'échantillon des n variables de Bernoulli : $F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On retiendra qu'il y a deux types d'approximation, l'une par une loi discrète (ce sera souvent le cas pour des événements " rares " - p très petit), l'autre par une loi continue. Les conditions de validité des approximations dépendent de la précision exigée. En pratique :

1. dès que $n > 30$ et $np < 15$, alors la loi $\mathcal{B}(n,p)$ est proche de la loi de Poisson $P(np)$.
2. dès que $np(1-p) > 5$ la loi $\mathcal{B}(n,p)$ est proche de la loi normale $N(np, np(1-p))$.

Loi de POISSON : $\boldsymbol{P}(\lambda)$

Définition 8 *Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson* $\mathrm{P}(\lambda)$ *si elle prend des valeurs entières avec les probabilités*

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \qquad \textit{pour } x \textit{ entier } x \geq 0 \textit{ et } \lambda > 0$$

Selon le résultat énoncé plus haut, la loi de Poisson est utilisée en cas de dénombrement d'événements rares et indépendants.

Théorème 9 *L'espérance et la variance de $X \approx \mathcal{P}(\lambda)$ sont :*

$$E(X) = \lambda \quad \textit{et} \quad V(X) = \lambda$$

Pour la loi de Poisson également il existe un résultat simple pour l'addition de deux variables de Poisson indépendantes.

Théorème 10 *Addition : Si $X_1 \approx \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \approx \mathcal{P}(\lambda_2)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors*

$$X_1 + X_2 \approx \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Loi uniforme : $U(0,\theta)$

Définition 11 *Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,\theta]$ et on note $X \approx U(0,\theta)$ si c'est une variable aléatoire absolument continue de densité f constante sur $[0,\theta]$.*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \textit{si } x \in [0,\theta] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

C'est l'exemple le plus simple d'une loi dont le support (ensemble des x pour lesquels $f(x) \neq 0$) dépend du paramètre : le support de la loi $U(0,\theta)$ est l'intervalle $[0,\theta]$.

Théorème 12 *Espérance et variance : Si $X \approx U(0,\theta)$, alors*

$$E(U) = \frac{\theta}{2} \quad \textit{et} \quad V(U) = \frac{\theta^2}{12}$$

Loi exponentielle : $\gamma(1,a)$.

Définition 13 *Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $a>0$ si c'est une variable aléatoire absolument continue et positive, de densité*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}e^{-x/a} & si\ \ x>0\\ 0 & sinon\end{cases}$$

C'est la loi des durées de vie, lorsque le taux de sortie à chaque instant ne dépend pas du temps déjà écoulé, sans mécanisme d'aguérissement ni d'usure.

Sa fonction de répartition, $F(x)=P(X\leqslant x)$, nulle pour $x\leqslant 0$, est égale à $F(x)=1-e^{-x/a}$ pour $x>0$. En termes de durées de vie, on démontre facilement que sachant que X à atteint une valeur a, la durée de vie restante ($Y=X-a$) a exactement la même loi que X .

Théorème 14 *L'espérance et la variance de $X\approx\gamma(0,a)$ sont*

$$E(X)=a \quad et \quad V(X)=a^2$$

Loi de LAPLACE-GAUSS ou Loi NORMALE :

Définition 15 *Une variable aléatoire X suit une loi $N\big(m;\sigma^2\big)$ et on note $X\approx N\left(m;\sigma^2\right)$ si c'est une variable absolument continue et de densité :*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$$

La densité est symétrique autour de m, et atteint son seul maximum en m

Remarque : lorsque l'exposant est un peu long à écrire, on préfère écrire $\exp[Z]$ plutôt que e^Z . Les deux écritures sont absolument équivalentes.

Théorème 16 *L'espérance et la variance de $X\approx N(m,\sigma^2)$ sont*

$$E(X)=m \quad et \quad V(X)=\sigma^2$$

La loi Normale est entièrement caractérisée par ces deux paramètres m et σ^2 . Noter que c'est la variance σ^2 qui est prise comme paramètre, et non l'écart-type σ , qui n'est défini que comme la racine carrée de la variance.

La propriété qui suit est une propriété caractéristique de la loi Normale.

Théorème 17 *Transformation affine : Si $X\approx N(m,\sigma^2)$, alors pour tous réels a et b :*

$$Z=aX+b\approx N\left(am+b;a^2\sigma^2\right)$$

Application aux calculs de probabilité (lecture de table)

La fonction de répartition (qui permet de calculer les probabilités de tous les événements relatifs à X) est égale à

$$P(X\leqslant a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

Il n'existe aucune formule permettant de la calculer en fonction de a : elle se calcule numériquement pour chaque a, et il n'y a aucun autre moyen de la désigner que comme cette intégrale. Le théorème énoncé plus haut permet de se ramener à la variable centrée réduite $U=\frac{X-m}{\sigma}$, d'espérance 0 et de variance 1, dont on sait qu'elle suit une loi Normale, $N(0;1)$. La fonction de répartition de la variable $N(0;1)$ est notée $\Phi(x)$:

$$\Phi(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du$$

Il existe des tables numériques donnant les valeurs $\Phi(b)$ pour différentes valeurs de b , et des formules dans les feuilles de calcul comme Microsoft®Excel (dans les fonctions statistiques) permettant d'obtenir $p = \Phi(b)$ pour toute valeur b donnée ou, à l'inverse, d'obtenir la valeur $b = \Phi^{-1}(p)$ correspondant à une probabilité p donnée.

Exemple 18 *On obtiendra par exemple dans Excel, pour* $b = 2$ *, puis pour* $p = 0.95$ *:*

$$\begin{aligned}
\Phi(2) &= P(U \leq 2) = LOI.NORMALE.STANDARD(2) = 0.977250 \\
\Phi^{-1}(0.95) &= LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(0.95) = 1.644853 \\
&\iff \Phi(1.644853) = P(U \leq 1.64485) = 0.95
\end{aligned}$$

On en déduit les probabilités concernant X :

$$P(a_1 < X \leqslant a_2) = P\left(\frac{a_1 - m}{\sigma} < \frac{X - m}{\sigma} \leqslant \frac{a_2 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_1 - m}{\sigma}\right)$$

Addition

Le théorème qui suit est un cas particulier d'un théorème plus général sur les lois Normales à plusieurs dimensions, qui sera énoncé plus bas.

Théorème 19 *La somme de deux variables Normales indépendantes suit une loi Normale*

Corollaire 20 *Si* $X_1 \approx N(m_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \approx N(m_2, \sigma_2^2)$ *et si* X_1 *et* X_2 *sont indépendantes, alors*

$$X_1 + X_2 \approx N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

(sachant que la loi est une loi Normale, il suffit de calculer l'espérance et la variance de la somme $X_1 + X_2$ pour connaître complètement sa loi).

Théorème Central Limite

Le théorème qui suit donne à la loi Normale une interprétation qui justifie son emploi très répandu.

Théorème 21 *Soit* $(X_1, X_2, ...X_N)$ *un échantillon tiré d'une loi* $\mathcal{L}$ *, et* $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ *la moyenne empirique de l'échantillon, notée* $\overline{X}_N$ *. Si la loi* $\mathcal{L}$ *possède une espérance* m *et une variance* σ^2*, alors lorsque* N *tend vers l'infini :*

$$\sqrt{N}\left(\overline{X}_N - m\right) \xrightarrow{loi} N\left(0;\sigma^2\right)$$

L'approximation Normale de la loi de la moyenne empirique d'un échantillon est souvent utilisée à partir de $N = 30$. Cela dépend en fait de la forme de la loi $\mathcal{L}$ dont l'échantillon est tiré : si cette loi est très différente de la loi Normale, la convergence peut n'être acceptable que pour de très grandes valeurs de N

VECTEURS ALEATOIRES

Espérance et Variance d'un vecteur aléatoire à n dimensions

Nous considérons ici des variables aléatoires admettant des moments jusqu'à l'ordre 2.

Définition 22 *Soit* $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ *un vecteur aléatoire de dimension n :* $E(X) =: \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$

$$\text{et } V(X) =: \begin{pmatrix} V(X_1) & cov(X_1, X_2) & \ldots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & V(X_2) & \ldots & cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \ldots & V(X_n) \end{pmatrix} = E\left\{[X - E(X)][X - E(X)]'\right\}$$

Notation : pour toute matrice M, sa transposée est notée M' .

La "variance" d'un vecteur est le tableau des covariances des coordonnées entre elles. On l'appelle donc aussi "matrice des covariances" de ce vecteur. Cette matrice est symétrique.

Les formules donnant l'espérance et la variance de $aX + b$ pour une variable aléatoire réelle se généralisent au cas d'une transformation affine d'un vecteur de dimension n :

Théorème 23 *Soit* X *un vecteur aléatoire de dimension n, possédant une espérance* $E(X) = m$ *et une variance* $V(X) = \Omega$. *Pour toutes matrices* C *, de format* (k, n) *, et* D*, de format* $(k, 1)$ *:*

$$\begin{aligned} E(CX + D) &= CE(X) + D \\ V(CX + D) &= CV(X)C' \end{aligned}$$

Par exemple, si λ' est une ligne de n coefficients, $\lambda'X$ est une variable aléatoire réelle dont la variance est $\lambda'V(X)\lambda$. On obtient donc le résultat suivant : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda'V(X)\lambda \geqslant 0$ (puisque c'est la variance de $\lambda'X$). Cela montre que la matrice des covariances d'un vecteur aléatoire est une matrice "semi-définie positive".

Loi Normale n-dimensionnelle $N(m; \Omega)$

Définition 24 *On dit que le vecteur* X *suit une loi Normale à* N *coordonnées de paramètres* $m \in \mathbb{R}^N$ *et* Ω*, où* Ω *est une matrice symétrique définie positive, de format* (N, N)*, et on note* $X \approx N(m; \Omega)$ *si la densité du N-uple est :*

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N [\det \Omega]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - m)' \Omega^{-1} (x - m)\right]$$

Exemple 25 *: pour un vecteur à 2 dimensions,* $X = \binom{X_1}{X_2}$, $m = \binom{m_1}{m_2}$ *et* $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{pmatrix}$, $X \approx N(m, \Omega)$ *si sa densité est* $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\omega_{11}x_1^2 + 2\omega_{12}x_1x_2 + \omega_{22}x_2^2\right)\right]$.

Théorème 26 *L'espérance et la variance d'un vecteur Normal* $N(m, \Omega)$ *sont*

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \Omega$$

Transformation linéaire ou affine

Le théorème qui suit donne une propriété caractéristique de la loi Normale.

Théorème 27 *Le vecteur aléatoire* X *suit une loi Normale si et seulement si tout vecteur déduit de* X *par transformation affine est aussi un vecteur Normal*

Corollaire 28 *:* $X \approx N(m; \Omega)$ *ssi pour toutes matrices* C *et* D *de formats respectifs* (k, N) *et* $(k, 1)$*:*

$$CX + D \approx N(Cm + D; C\Omega C')$$

LOIS de VARIABLES ALEATOIRES LIEES à des VARIABLES NORMALES

Certaines lois peuvent être construites à partir de la loi Normale centrée réduite.

Nous ne donnerons pas ici une définition complète de ces lois par leurs densités, mais toutes les définitions qui suivent devront être parfaitement assimilées.

Loi du CHI DEUX :χ^2_n (chi-deux à n degrés de liberté)

Définition 29 *Soit n variables aléatoires $U_1, U_2, ..., U_n$ indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0;1)$.La loi de la variable aléatoire $Y = \sum_{i=1}^{n} U_i^2$ est appelée loi de chi-deux à n degrés de liberté, et on note*

$$\sum_{i=1}^{n} U_i^2 \approx \chi^2_n$$

Théorème 30 *L'espérance et la variance de $Y \approx \chi^2_n$ sont*

$$E(Y) = n \quad et \quad V(Y) = 2n$$

Théorème 31 *Addition de chi-deux indépendants : Si $Y_1 \approx \chi^2_{n_1}$ et $Y_2 \approx \chi^2_{n_2}$, et si Y_1 et Y_2 sont indépendantes, alors*

$$Y_1 + Y_2 \approx \chi^2_{n_1+n_2}$$

Théorème 32 *Approximation numérique lorsque n est grand : dès que $n \geqslant 30$, la loi de la variable aléatoire $\sqrt{2\chi^2_n} - \sqrt{2n-1}$ peut être approchée par une loi $N(0;1)$.*

Loi de STUDENT : $\mathbf{T}_n$ (Student à n degrés de libertés).

Définition 33 *Si $U \approx N(0;1)$, $Z \approx \chi^2_n$ et si U et Z sont indépendantes, alors la loi de $T_n = \frac{U}{\sqrt{Z/n}}$ est appelée loi de Student à n degrés de liberté, et on note $\frac{U}{\sqrt{Z/n}} \approx \mathbb{T}(n)$*

La loi de Student ainsi définie est une loi symétrique autour de 0, unimodale, et ne se distingue de la loi Normale que par un plus grand applatissement (la probabilité est plus "étalée" pour la Student que pour la Normale).

Théorème 34 *L'espérance et la variance de $T_n \approx \mathbb{T}(n)$ existent et vérifient*

$$E(T_n) = 0 \quad et \quad V(T_n) > 1$$

Théorème 35 *Convergence en loi lorsque n tend vers l'infini : $\mathbb{T}(n) \xrightarrow{loi} N(0;1)$*

En pratique, l'infini est ici atteint dès $n > 30$ si on se contente d'un chiffre significatif derrière la virgule.:pour apprécier la proximité de la loi $\mathbb{T}(30)$ à la loi $N(0;1)$, il suffit d'examiner les tables de la loi de Student, qui donnent en dernière ligne "$n \ \infty$" correspondant aux valeurs de la loi Normale $N(0;1)$.

Exemple 36 *Dans une feuille de calcul Excel :*
$LOI.STUDENT.INVERSE(0.05;n)$ renvoie la valeur A telle que

$$P(\mid T_n \mid > A) = 0.05$$

On obtient ainsi :

n	*10*	*30*	*100*	∞
A	*2.22814*	*2.04227*	*1.98397*	*1.95996*

Loi de FICHER-SNEDECOR : $F(n_1, n_2,)$

Définition 37 *Si $X_1 \approx \chi^2_{n_1}$ et $X_2 \approx \chi^2_{n_2}$, et si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors la loi de $F = \frac{\chi^2_{n_1}/n_1}{\chi^2_{n_2}/n_2}$ est appelée loi de Fisher à n_1 degrés de liberté au numérateur et n_2 degrés de liberté au dénominateur et on note :*

$$\frac{\chi^2_{n_1}/n_1}{\chi^2_{n_2}/n_2} \approx F(n_1, n_2)$$

N.B. : La variable aléatoire $\frac{1}{F} = \frac{\chi^2_{n_2}/n_2}{\chi^2_{n_1}/n_1} \approx F(n_2, n_1)$.

La table de la loi de Fisher est un tableau à double entrée, qui donne, pour chaque couple (n_1, n_2) , la valeur A telle que $P(F(n_1, n_2) > A) = \alpha$ (une table pour chaque valeur de α).Si l'on désire connaître la valeur B telle que $P(F(n_1, n_2) < B) = \alpha$, il suffit d'écrire l'inégalité avec les inverses : $P(F(n_1, n_2) < B) = P\left(\frac{1}{F(n_1,n_2)} > \frac{1}{B}\right)$, et donc $\frac{1}{B}$ sera lu pour n_2 degrés de liberté au numérateur et n_1 degrés de liberté au dénominateur.

Dans une feuille de calcul Excel©, on obtiendra par exemple pour $n_1 = 5$ et $n_2 = 8$:
$LOI.F(1.83; 5; 8) = 0.21318$ pour répondre à la question $P(F(5, 8) < 1.83) =?$
$INVERSE.LOI.F(0.05; 5; 8) = 3.6875$ pour répondre à la question $P(F(5, 8) <?) = 0.05$

ECHANTILLONS NORMAUX

Définition 38 *Rappel : $(X_1, X_2, ..., X_n)$ forment un n-échantillon de X si les variables aléatoires X_1, ..., X_n sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) selon la loi de X. Une statistique est une fonction réelle (mesurable) des variables aléatoires de l'échantillon.*

Une statistique est donc une variable aléatoire. La condition de mesurabilité de la fonction veut simplement dire que la probabilité de tout événement relatif à la statistique pourra se calculer à partir de la loi de l'échantillon. Les résultats qui suivent concernent les échantillons de lois Normales, et les lois sont donc applicables même lorsque la taille n de l'échantillon est petite.

Résultats principaux pour un échantillon

Théorème 39 *Si $X_1, X_2, ..., X_N \approx i.i.d.\ N(m, \sigma^2)$, alors*

1) $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \approx N\left(m; \frac{\sigma^2}{N}\right)$

2) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} (X_i - m)^2 \approx \chi^2_N$

3) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} \left(X_i - \overline{X}_N\right)^2 \approx \chi^2_{N-1}$

4) $\overline{X}_N$ *et* $\sum_{i=1}^{N} \left(X_i - \overline{X}_N\right)^2$ *sont indépendants entre elles*

Les n variables aléatoires $\frac{X_i - m}{\sigma}$ sont i.i.d. selon une $N(0; 1)$, la somme des n carrés est donc bien un chi-deux à n degrés de liberté. Noter que lorsqu'on remplace l'espérance m par la moyenne empirique de l'échantillon, les variables aléatoires $\frac{X_i - \overline{X}_n}{\sigma}$sont liées par une et une seule relation : elles sont de somme nulle. La somme des carrés est encore un chi-deux, mais avec un degré de liberté de moins.

Corollaire 40 *Si $X_1, X_2, ..., X_N \approx i.i.d.\ N(m, \sigma^2)$, alors*

5) $\frac{\overline{X}_N - m}{S/\sqrt{N}} \approx \mathbb{T}(N-1)$, *où* $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_N\right)^2}{N-1}$

Résultats principaux pour deux échantillons indépendants

Corollaire 41 *Soient deux échantillons indépendants*
$X_1, X_2, ..., X_{n_1} \approx i.i.d.\ N(m_1, \sigma_1^2),$ *et* $Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2} \approx i.i.d. N(m_2, \sigma_2^2)$ *:*

6) $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_{n_1}\right)^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} \left(Yj - \overline{Y}_{n_2}\right)^2} \frac{(n_2-1)}{(n_1-1)} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \approx F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

7) $\frac{\overline{Y}_{n_2} - \overline{X}_{n_1} - (m_2 - m_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n2}}} \approx N\left(0; 1\right)$