Université Paris XII
Mathématiques

Licence Économie-Gestion
Tronc commun, semestre 3

9. Suites récurrentes

Exercice 1 — On considère la relation de récurrence

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = -2x_n + \frac{3}{2}y_n \\ y_{n+1} = -3x_n + \frac{5}{2}y_n. \end{array}\right.$$

(1) Écrire cette relation sous forme matricielle.

(2) Déterminer la solution générale.

(3) On suppose que $x_0 = 0$ et $y_0 = -1$. Calculer x_n et y_n en fonction de n. Quel est le comportement asymptotique de x_n et de y_n quand $n \to +\infty$?

(4) Même question avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$.

(5) Y a-t-il un vecteur d'équilibre non nul ?

Exercice 2 — On note π_n le prix à l'année n d'un produit donné. La quantité demandée dépend de ce prix selon la relation $D_n = 220 - 0.4\pi_n$, alors que la quantité produite dépend du prix de l'année passée selon la relation $P_n = 0.6\pi_{n-1} - 30$. On suppose qu'en l'an 2000 on a fixé le prix à 245 euros et que, chaque année, l'offre est égale à la demande.

(1) Donner une relation entre π_n et π_{n-1}.

(2) En déduire π_n en fonction de n.

(3) Y a-t-il un prix d'équilibre ?

Exercice 3 — La vie du lapin comporte deux périodes : jeune lapin et vieux lapin. Un jeune lapin au temps n devient vieux au temps $n + 1$, et donne naissance (en moyenne) a 1 jeune au temps $n + 1$. Un lapin vieux au temps n meurt au temps $n+1$, après avoir donné naissance à deux jeunes (en moyenne). On note respectivement j_n et v_n le nombre de jeunes lapins et de vieux lapins au temps n.

(1) Exprimer j_{n+1} en fonction de j_n et j_{n-1}.

(2) On pose

$$J_n = \begin{pmatrix} j_n \\ j_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Quelle équation lie J_n et J_{n+1} ?

(3) On suppose $j_0 = 2$ et $v_0 = 0$. Déterminer j_n en fonction de n.

Exercice 4 — Trois produits de consommation courante A_1, A_2 et A_3 sont en concurrence sur le marché. Au 1er janvier 2000, une enquête réalisée sur un échantillon représentatif de consommateurs a donné les résultats suivants : 30% des personnes intérogées ont déclaré consommer A_1, 50% A_2 et 20% A_3. Ces valeurs seront notées respectivement p_0, q_0 et r_0, et on appellera « état initial du marché » le vecteur $V_0 = (p_0, q_0, r_0) \in \mathbb{R}^3$.

Les fabricants du produit A_1 lancent une campagne publicitaire d'un mois le 1er janvier 2000. Une enquête réalisée le 1er février 2000 sur le même échantillon a donné les résultats suivants :

- parmi les clients de A_1 au 1er janvier,
  - 80% continuent d'acheter A_1,
  - 10% deviennent acheteurs de A_2,
  - 10% deviennent acheteurs de A_3,

- parmi les clients de A_2 au 1er janvier,
  - 60% continuent d'acheter A_2,
  - 30% deviennent acheteurs de A_1,
  - 10% deviennent acheteurs de A_3,
- parmi les clients de A_3 au 1er janvier,
  - 70% continuent d'acheter A_3,
  - 20% deviennent acheteurs de A_1,
  - 10% deviennent acheteurs de A_2.

(1) On note $V_1 = (p_1, q_1, r_1)$ l'état du marché au 1er février 2000. Montrer qu'il existe une matrice carrée M telle que $V_1 = MV_0$. Se peut-il que l'état du marché au 1er février soit le même qu'au 1er janvier ?

(2) On suppose que la campagne publicitaire continue et que, mois par mois, ses effets restent identiques à ceux du premier mois. On note $V_n = (p_n, q_n, r_n)$ l'état du marché après n mois de campagne publicitaire. Exprimer V_n en fonction de M et de V_{n-1}.

(3) Calculer V_n.

(4) Quel est l'état du marché quand $n \to +\infty$?

Exercice 5 — Dans un modèle économique, pour l'année n, on note C_n la consommation, Y_n le revenu, I_n l'investissement et G les dépenses gouvernementales d'un pays (G ne dépend pas de n). Ces quantités sont reliées par les équations

$$\begin{cases} C_n - 0.9Y_n = b \\ I_n - 0.09Y_n = 0.002Y_{n-1} + e \\ -C_n - I_n + Y_n = G. \end{cases}$$

(1) Déterminer l'équation reliant Y_n à Y_{n-1}.

(2) Étudier, en fonction de b, e et G, l'évolution de Y_n.

Exercice 6 — On suppose que deux quantités dépendant du temps x_n et y_n ($n \in \mathbb{N}$) sont liées par les relations

$$\begin{cases} x_{n+1} = -y_n \\ y_{n+1} = x_n + 5y_n, \end{cases}$$

sachant que $x_0 = 1$ et $y_0 = -2$. Calculer x_n et y_n en fonction de n. Quel est leur comportement asymptotique (lorsque $n \to +\infty$) ?

Exercice 7 — Déterminer les suites (x_n), (y_n) et (x_n) qui vérifient la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 4z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 4y_n + 12z_n \\ z_{n+1} = x_n - 2y_n + 5z_n. \end{cases}$$

Exercice 8 — Déterminer les suites (x_n), (y_n) et (x_n) qui vérifient la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = -3x_n - y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = 3x_n + 3y_n - z_n \end{cases}$$

avec $x_0 = y_0 = z_0 = 1$. Quel est leur comportement asymptotique quand $n \to +\infty$?

* **Exercice** 9 — Étudier graphiquement l'évolution de $u_{n+1} = u_n^3 - u_n$ en fonction de la valeur initiale u_0.