Fiche de Statistique et Econométrie
Licence L3 d'Economie, Université Paris I Panthéon Sorbonne
TD n° 2 : Eléments d'échantillonnage et Comportement Asymptotique

Références :

Chapitre II : Eléments d'échantillonnage et Comportement Asymptotique

Application économétrique : minimisation d'une distance sur un échantillon, formules matricielles des MCO
Complément : L'information au sens de Fisher

Lecoutre, Chapitre 5 : Lois empiriques
Kaufmann, Chapitre 3 : Convergences Stochastiques ; Chapitre 5 : L'échantillonnage

I. Types de Convergence :

Exercice 1 :

Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi normale de moyenne m et de variance σ^2. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers m.

Exercice 2 :

Soient les variables aléatoires indépendantes Y suivant une loi normale N(0,1) et Z_n telles que $E(Z_n) = 0$ et $V(Z_n) = \frac{1}{n}$. On définit la suite de v.a. $\{Y_n\}$ telles que $Y_n = Y + Z_n$. En utilisant l'inégalité de Chebychev, montrer que Y_n converge en probabilité vers Y.

Exercice 3 :

En utilisant l'inégalité de Chebychev, montrer que si X est une v.a. réelle d'espérance mathématique m et de variance σ^2, alors $P(|X - m| < \lambda\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$ pour tout $\lambda > 0$.

Exercice 4 :

Quelles sont les différences entre les convergences presque sûres, en loi, en probabilité et en moyenne quadratique ?

II. Echantillonnage en population finie :

Exercice 5 :

Nous avons envoyé 600 propositions d'assurance à des clients potentiels tirés dans une très large population et nous avons en retour obtenu 78 réponses favorables. Nous nous intéressons à la valeur de la probabilité p de succès pour chaque envoi et nous pouvons supposer que les comportements des individus sont indépendants les uns des autres.

1. Quel estimateur proposez-vous pour p ? Quelle est l'estimation correspondant aux observations faites ?
2. Quelle est la loi de cet estimateur ? Pouvez-vous utilisez l'approximation normale pour les calculs numériques ?
3. Construisez un intervalle bilatéral de confiance proche de 95 % pour p, et calculez l'intervalle ici observé.

Exercice 6 : Examen, Janvier 06, exercice

On considère un échantillon X_1, X_2, …X_n tiré d'une population de moyenne *m*, de variance σ^2, avec $n > 30$. On propose deux estimateurs de *m* :

m_1 = moyenne des (n-3) premières valeurs = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n-3} x_i}{n-3}$

$m2 = \dfrac{(x_1+x_{n-1})}{2}$

Comparer ces deux estimateurs du point de vue de leur biais et de leur efficacité.

III. Echantillonnage d'un processus aléatoire :

Exercice 7 :

Le Ministère américain des statistiques du travail a déclaré que le taux de salaire horaire moyen des cadres, des directeurs et des managers était égal à 24,07 dollars (The Wall street Journal Almanac, 1998). Supposez que la moyenne de la population soit μ= 24,07 dollars et que l'écart-type de la population soit σ= 4,80 dollars. Un échantillon de 120 cadres, directeurs et managers est sélectionné.

a) Quelle est la probabilité que la moyenne de l'échantillon s'écarte au plus de + ou – 0,50 dollar de la moyenne de la population ?
b) Quelle est la probabilité que la moyenne de l'échantillon s'écarte au plus de + ou – 1 dollar de la moyenne de la population ?

Exercice 8 :

Une société d'études de marché effectue des sondages par téléphone, avec historiquement un taux de réponse de 40%. Quelle est la probabilité que dans un nouvel échantillon de 400 numéros de téléphone, au moins 150 individus coopèrent et répondent aux questions ? En d'autres termes, quelle est la probabilité que la proportion de réponse dans l'échantillon soit au moins égale à 150/400=0,375 ?

IV. Echantillonnage issu d'une loi normale :

Exercice 9 :

Soit X une variable aléatoire de loi normale d'espérance m et de variance σ^2. Nous disposons d'un échantillon de n tirages de X :

$$X_1, X_2, ..., X_n \rightsquigarrow iid\ N(m, \sigma^2)$$

Nous désirons estimer m et prévoir le prochain tirage X_{n+1}. La variance est connue et égale à 4.

1. Quelle est le meilleur estimateur de m ? Quelle est la loi de cet estimateur ?
2. Le prochain tirage X_{n+1} est supposé indépendant des $X_1, X_2, ..., X_n$ et de même loi $N(m, \sigma^2)$. Quelle est la meilleure prévision de X_{n+1} ?
3. Quelle est la loi de la variable $Z = X_{n+1} - \bar{X}_n$, où $\bar{X}_n$ désigne la moyenne empirique de l'échantillon ?
4. En déduire un intervalle de prévision à 80 % à partir d'un échantillon de taille $n = 24$.

Exercice 10 :

Pour simuler un tirage d'une loi normale, on calcule souvent la somme de 12 tirages d'une loi uniforme L(0,1) à laquelle on en enlève 6. Pouvez-vous justifier cette procédure ?

Exercice 11 :

L'échantillon suivant est tiré d'une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ :

X= 1.3 ; 2.1 ; 0.4 ; 1.3 ; 0.5 ; 0.2 ; 1.8 ; 2.5 ; 1.8 ; 3.2

Calculez la moyenne, la médiane, la variance et l'écart-type de l'échantillon.