TD 4 : Estimation Ponctuelle

Exercice 1 : Loi usuelles

Dans chacun des modèles suivants, dire quel est le paramètre, l'ensemble de ses valeurs et écrire sa vraisemblance (attention, "le" paramètre peut être de dimension supérieure à 1).

1. N-échantillon d'une loi de Bernoulli : $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_N \approx\ i.i.d.\ B(1,p)$.
2. N-échantillon d'une loi de Poisson : $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_N \approx\ i.i.d.\ P(\lambda)$.
3. N-échantillon d'une loi de Exponentielle : $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_N \approx\ i.i.d.\ \Gamma(1,\theta)$.
4. N-échantillon d'une loi de Normale : $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_N \approx\ i.i.d.\ N(m,\sigma^2)$.
5. N-échantillon d'une loi de Uniforme : $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_N \approx\ i.i.d.\ U[0,\theta]$.

Exercice 2 : Estimateur du Maximum de vraisemblance

On dispose d'un échantillon $(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_N)$ de taille N d'une variable suivant une loi exponentielle de paramètre a (réel strictement positif), de densité :

$$f(x,a) = \begin{cases} \frac{1}{a}\ e^{-x/a} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle que $E(X) = a$ et $V(X) = a^2$. (voir notes de cours sur les lois usuelles)

1. Vérifier par le calcul que l'estimateur du maximum de vraisemblance de a est $\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ (moyenne empirique des N valeurs prises par X).
2. Montrer que $\overline{X}_N$ est un estimateur sans biais de a.
3. ***(facultatif) Montrer que $\overline{X}_N$ est un estimateur efficace de a.

Exercice 3 : Estimateur du Maximum de vraisemblance

Soit $(Y_1, ...Y_n)$ un échantillon de taille n provenant d'une variable aléatoire de densité $f(y;\theta)$.
Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque

$$f(y;\theta) = \theta y^{\theta-1} \qquad\qquad \textit{avec}\ \ 0 < y < 1$$

Exercice 4 : Méthode des moments

Le gérant d'un supermarché désire modéliser le comportement des acheteurs de couches O'Sek, une société irlandaise qui exporte dans toute l'Europe. Il pense que la fréquence d'achat depend (entre autres) du nombre de paquets achetés à chaque passage. Plus précisément, il suppose que le nombre journalier d'acheteurs d'un seul paquet est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson P (λ_1), alors que le nombre journalier d'acheteurs de deux paquets est une variable aléatoire Z suivant une loi de Poisson P (λ_2). Nous supposons (pour simplifier) qu'il n'y a pas d'acheteur de plus de deux paquets à la fois, et que X et Z sont indépendantes en probabilité. La seule observation disponible chaque jour est le nombre total de paquets vendus : $Y = X + 2Z$. Les observations (i.i.d.) de N jours conduisent à l'échantillon $(Y_1, Y_2, ..., Y_N)$ de la loi de Y.

1. Préciser le modèle statistique ainsi postulé.
2. Nous notons respectivement m et V l'espérance mathématique et la variance de Y. Calculer m et V en fonction de λ_1 et λ_2 et en déduire l'expression de λ_1 et λ_2 en fonction de m et V.
3. En déduire des estimateurs convergents de λ_1 et de λ_2. Quel défaut ces estimateurs peuvent-ils présenter pour des échantillons de petite taille ? Quel est leur avantage par rapport aux estimateurs du maximum de vraisemblance ?

Exercice 5 : Méthode des moments

Donnez un estimateur de θ suivant la méthode des moments pour

$$f(y;\theta) = (\theta + 1)y^{-\theta-2} \qquad\qquad \textit{avec} \;\; 0 < y < 1$$