

TD 5 : Estimation par Intervalle de Confiance

Exercice 1 : Intervalle de confiance pour une proportion

Deux candidats, Ségolène et Nicolas, sont en présence lors du deuxième tour d'une élection présidentielle au cours de laquelle 40 millions d'électeurs sont amenés à s'exprimer.

n personnes sont tirées au hasard parmi ces électeurs et interrogées sur leurs intentions de vote (on suppose qu'à ce moment tous les électeurs ont fixé leur choix et n'en changeront pas au moment du vote). 52% des électeurs interrogés annoncent qu'ils sont partisans de Ségolène.

- Calculer, pour $n = 100$, une borne inférieure de confiance 95% pour le pourcentage d'électeurs favorables à Ségolène dans la population totale.
- Que devient cette borne inférieure de confiance 95% pour les valeurs suivantes de n :
 - $n = 1000$?
 - $n = 2000$?
- A partir de quelle taille n du sondage effectué, le pourcentage observé de 52% d'électeurs favorables à Ségolène conduirait-il celui-ci à accorder une confiance de 95% au fait d'être élu (c'est-à-dire que la borne inférieure de confiance 95% serait supérieure ou égale à 0.50) ?

Exercice 2 : Intervalle de confiance pour l'espérance d'une variable Normale

Le coût d'un certain type de sinistre peut être considéré comme une variable aléatoire X suivant une loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On observe, dans une compagnie d'assurance, n dossiers de sinistres indépendants.

- On suppose que l'écart-type σ est connu, égal à 15 Euros.
 - Calculer l'intervalle bilatéral de confiance 98% pour m .
Application numérique : pour 20 dossiers, la moyenne des coûts observée est 120 Euros : dans quelle fourchette placez-vous m ?
 - Combien de dossiers doit-on examiner pour que la longueur de l'intervalle de confiance 98% soit inférieure ou égale à 10 Euros ?
- L'écart-type σ n'est en fait pas connu.
 - Comment l'intervalle est-il modifié ?
Application numérique : pour 20 dossiers, la moyenne des coûts observés est 120 Euros, et l'estimation sans biais de σ^2 est égale à $(15)^2$.
 - Vérifier que la longueur de l'intervalle de confiance est aléatoire. Croyez-vous pouvoir calculer facilement sa valeur moyenne ?

Exercice 3 :

Soient $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{25})$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi Normale d'espérance m et de variance σ^2 :

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_{25} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

1. Quel estimateur proposez vous pour l'espérance m ?
2. Quelle est la loi de cet estimateur ?
3. Si nous pouvons assurer que la variance est connue, $\sigma^2 = 2,25$, calculez un intervalle de confiance à 95 % pour m .
4. La variance est en fait inconnue. Comment est modifié l'intervalle de confiance à 95 % précédent ?
5. Application numérique : donner l'estimation de m et les deux intervalles de confiance correspondant aux observations faites, qui ont pour moyenne et variance empirique :

$$\bar{y} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} y_i = 13,5 \text{ et } s^2 = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{25} (y_i - \bar{y})^2 = 1,69$$

Exercice 4 :

On observe sur un échantillon E_n de taille $n = 400$, deux variables aléatoires X et Y indépendantes telles que : $E(X)=2$, $V(X)=4$, $E(Y)=8$, $V(Y)=10$.

1. Déterminez la valeur de λ pour que $Z = 5X + \lambda Y$ ait une espérance mathématique nulle.
2. Calculez $V(Z)$.
3. En déduire un intervalle I de la forme $[-a,a]$ tel que $P(Z \in I) \geq 0,9$.